Exercice 1 : (3 points)

Dans le tableau suivant, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte.
Ecrire le numéro de chaque question et donner, **sans justifier**, la réponse qui lui correspond.

1. Si X suit la loi uniforme continue sur l'intervalle [0, 1] alors $P(0,2 \leq X \leq 0,92) =$

a) 0,7 ; **b)** 0,72 ; **c)** 0,9

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{i}, \vec{j}\right)$.

2. La parabole de foyer $F\left(2, \frac{1}{4}\right)$ et de directrice $D : y = -\frac{1}{4}$ a pour équation :

a) $y = x^2 - 4x + 4$; **b)** $(x-2)^2 = -y$; **c)** $(y-2)^2 = x$

3. Si (H) est l'hyperbole d'équation réduite $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$ alors toutes droite passant par le point A(5, 0) et parallèle à l'une des asymptotes à (H) coupe (H) en :

a) un seul point ; **b)** deux points exactement ; **c)** en plus que deux points.

Exercice 2 : (4 points)

On se propose de résoudre déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0, +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle (E) : $xf'(x) - (2x+1)f(x) = 8x^2$.

1. On pose pour tout $x > 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x}$.

a) Démontrer que : si f est solution de (E) alors g est solution de l'équation (E') : $y' = 2y + 8$.

b) Montrer que : si h est solution de (E') f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x\,h(x)$ est solution de (E).

2. Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E).

3. Existe-t-il une fonction f solution de (E) telle que $f(\ln 2) = 0$.

Exercice 3 : (4 points)

La durée de vie d'une machine à laver est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, $\lambda > 0$. Ainsi, la probabilité que la machine de tombe pas en panne avant t années (t > 0) est égale à $P(X \leq t) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$.

1. Déterminer λ, arrondi à 10^{-2}, pour que la probabilité P(X > 3) = 0,86.

2. Calculer la probabilité pour que cette machine fonctionne entre 3 et 10 ans.

3. Quelle est la probabilité qu'elle tombe en panne pour la première fois après 10 ans de fonctionnement ?

4. Sachant que la machine à laver à fonctionner 3 ans, quelle est la probabilité :

   a) pour qu'elle tombe en panne avant 10 ans.

   b) pour qu'elle ne tombe pas en panne avant 10 ans.

Exercice 4 : (4 points)

Une enquête menée pour le compte d'une entreprise a permis d'établir le nombre d'acheteurs d'un produit A selon le montant de son prix de vente. Les résultats de l'enquête sont résumés dans le tableau ci-dessous dans lequel :
• x_i désigne le prix de vente unitaire (en dinars) du produit A;
• y_i le nombre d'acheteurs en milliers.

x_i	1	1,50	2	3	4
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

1. Représenter sur votre copie le nuage de points associé à la série (x_i, y_i) dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan (***unités graphiques* :** 4 cm pour 1 dinar en abscisse et 2 cm pour 1 000 acheteurs en ordonnée).

2. On recherche un ajustement affine de la série (x_i, y_i).
   a. Donner l'équation de la droite d'ajustement de *y* en *x* obtenue par la méthode des moindres carrés.
   (Les calculs seront faits à la calculatrice et les valeurs cherchées seront arrondies au centième ; on ne demande aucune justification).
   b. Tracer cette droite dans le même repère que précédemment.
   c. Utiliser cet ajustement pour estimer le nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 Dinars.

3. La forme du nuage permet d'envisager un ajustement à l'aide d'une parabole. On pose $z_i = (0,75x_i - 3,16)^2$

a. Donner une équation de la droite d'ajustement affine de y en z par la méthode des moindres carrés (les coefficients seront arrondis à 10^{-3} près).
b. Vérifier que la nouvelle estimation de y en fonction de x est donnée par $y = 0,313x^2 - 2,64x + 6,062$ (les coefficients sont arrondis à 10^{-3} près).
c. En utilisant cet ajustement, donner une nouvelle estimation du nombre d'acheteurs potentiels pour un produit vendu 2,50 dinars.

Exercice 5 : (5 points)

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 3x + \sqrt{9x^2 + 1}$

a) Vérifier que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout x réel , g(x) > 0.

On définit sur $\mathbb{R}$ la fonction f par $f(x) = \ln(g(x))$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

2. Calculer f(x) + f(-x) et en déduire qu'il suffit d'étudier les variations de sur $[0,+\infty[$.

3. a- Vérifier que pour tout x réel, $f'(x) = \dfrac{3}{\sqrt{9x^2 + 1}}$.

b- Montrer que O est un point d'inflexion de (C).

4. a- Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

b- Dresser le tableau de variations de f.

5. a- Tracer la droite (D) : y = x et la courbe (C).

b- L'équation f(x) = x admet trois racines dont l'une α est positive.
Vérifier que $2,7 < \alpha < 2,9$.

6. a- Démontrer que la fonction f admet sur son domaine de définition une fonction réciproque f^{-1} et tracer sa courbe représentative (C') dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

b- Montrer que pour tout x réel, $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{6}\left(e^x - e^{-x}\right)$.

7. Calculer l'aire, en unités d'aire, des deux régions du plan limitées par les deux courbes (C) et (C').

CORRIGE

Exercice 1 :

1. **b)** ; 2.**a)** ; 3. **a)**

Exercice 2 :

1. a) On suppose que f est solution de (E) :

Pour tout x > 0, $xf'(x)-(2x+1)f(x)=8x^2 \Leftrightarrow f'(x)=\dfrac{8x^2+(2x+1)f(x)}{x}$.

Or $g(x)=\dfrac{f(x)}{x}$ alors

$$g'(x)=\frac{xf'(x)-f(x)}{x^2}=\frac{8x^2+(2x+1)f(x)-f(x)}{x^2}=\frac{8x^2+2xf(x)}{x^2}=8+2\frac{f(x)}{x}=8+2g(x).$$

Donc g vérifie l'équation différentielle (E') : $y'=2y+8$.

Par conséquent , si f est solution de (E) alors g est solution de (E').

b) On suppose que h est solution de (E') :

on alors h'(x) = 8 + 2 h(x) , d'où, pour la fonction f définie par f(x) = x.h(x) ,

f '(x) = x.h'(x) + h(x) = 8x + 2x.h(x) = 8x + (2x + 1) h(x)

Donc , on a : x.f '(x) – (2x + 1).f(x) = 8x² + x(2x + 1).h(x) –(2x + 1)f(x) = 8x².

Donc f est solution de (E).

2. (E') $\Leftrightarrow y=ke^{2x}+4,\ k\in\mathbb{R}$.

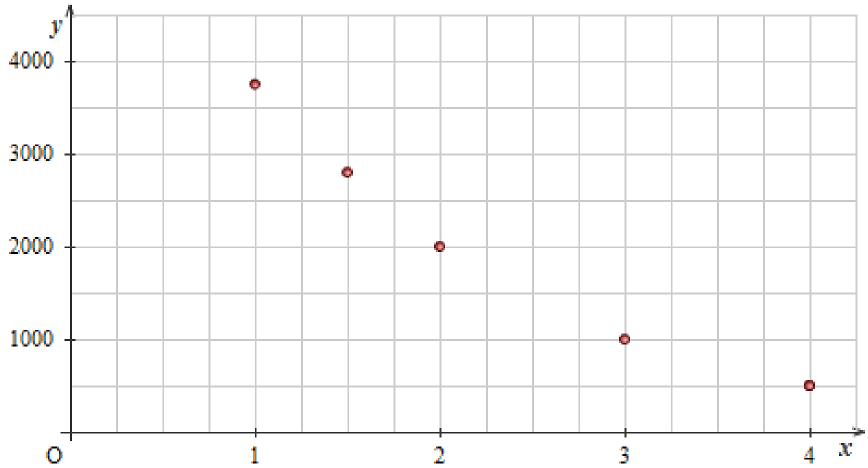
3. f est solution de (E) $\Leftrightarrow f(x)=x.g(x)\Leftrightarrow f(x)=kxe^{2x}-4x,\ k\in\mathbb{R}$.

Or $f(\ln 2)=0\Leftrightarrow k\ln 2\,e^{2\ln 2}-4\ln 2=0\Leftrightarrow 4k\ln 2=4\ln 2\Leftrightarrow k=1$.

Donc pour tout x > 0, $f(x)=xe^{2x}-4x$.

Exercice 4 :

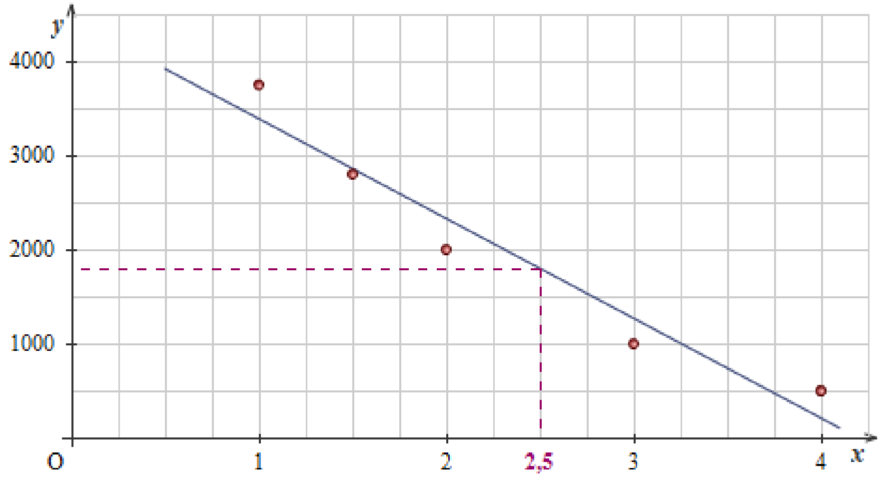
1. Le nuage de points



2. a) Une équation de la droite d'ajustement affine de y en x par la méthode des moindres est :

y = -1,06.x + 4,45.

b)



c) Si le prix de ventre est 2,5 dinars alors, une estimation du nombres d'acheteurs, exprimés en milliers est : y = -10,6. 2,5 + 4, 45 = 1,8 .

Le nombre d'acheteurs est donc 1800.

2. a) On complète le tableau suivant :

x_i	1	1,50	2	3	4
$z_i = (0,75x_i - 3,16)^2$	5,8081	4,141225	2,7556	0,8281	0,0256
y_i	3,75	2,8	2	1	0,5

Une équation de la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés est :

z = 0,557.x + 0, 500 .

b) $y = 0,557.z + 0,500 \Leftrightarrow y = 0,557(0,75x - 3,16)^2 + 0,500$

$$\Leftrightarrow y = 0,557(0,5625x^2 - 4,74x + 9,9856) + 0,5$$

D'où $y = 0,313x^2 - 2,64x + 6,062$

c) Le prix de vente est de 2,500 dinars alors, une estimation du nombre d'acheteurs, exprimé en milliers est :

$$y = 0,313 \times (2,5)^2 - 2,64 \times 2,5 + 6,062 = 1,41825$$

Donc le nombre d'acheteurs est 1418.