Exercice 1 (3 points)

Dans le tableau ci-dessous, une seule des réponses proposées à chaque question est correcte. Ecrire le numéro de chaque question et donner, **sans justification**, la réponse qui lui correspond.

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, on considère les points $A(1, 1, 0)$, $B(1, 0, 1)$ et $C(0,1,1)$. On désigne par t la translation de vecteur $\vec{u}=\frac{1}{2}\left(\vec{i}+\vec{j}+\vec{k}\right)$ et par h l'homothétie de centre A et de rapport $-\frac{2}{3}$.

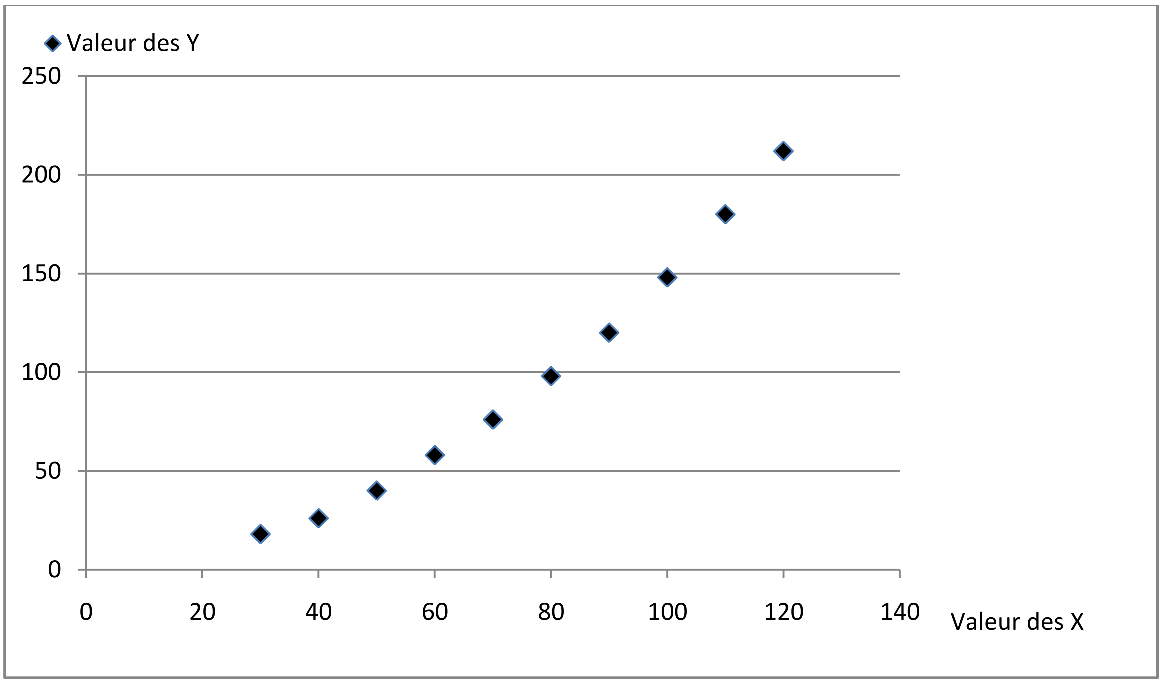
N	Questions	Réponses		
		a	b	c
1	L'aire du triangle ABC est :	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
2	Le volume du tétraèdre OABC est :	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$
3	l'image du plan (ABC) par t est le plan (P) d'équation :	$x+y+z-\frac{7}{2}=0$	$x+y+z-1=0$	$x+y+z-\frac{1}{2}=0$
4	Si (S) est la sphère d'équation $x^2+y^2+z^2=\frac{4}{3}$ alors son image par h est la sphère (S')	de centre $\Omega\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},0\right)$ et de rayon $R=\frac{4\sqrt{3}}{9}$	de centre $\Omega\left(-\frac{5}{3},-\frac{5}{3},0\right)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$	de centre $\Omega\left(\frac{5}{3},\frac{5}{3},0\right)$ et de rayon $R=\sqrt{3}$

Exercice 2 (3 points)

Le tableau suivant donne la distance de freinage nécessaire à un automobile circulant sur une route humide pour s'arrêter : x_i représente la vitesse de l'automobile en km/h et d_i la distance de freinage en mètres.

x_i	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
d_i	18	26	40	58	76	98	120	148	180	212

1. Ci-dessous est tracé dans un repère orthogonal le nuage de points $M_i(x_i,d_i)$



a) Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points.

b) Un ajustement affine de la série (x, d) parait-il justifié ?

2. On pose $y_i = \sqrt{d_i}$.

a) Recopier et compléter le tableau suivant où y_i est arrondie au centième près :

x_i	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
y_i	4,24									

b) Déterminer une équation de la droite d'ajustement (D) de y en x par la méthode des moindres carrés, en arrondissant les coefficients à 0,01 prés.

c) En utilisant la droite (D), déterminer une estimation de y si la vitesse de freinage était de 140 km/h.
En déduire la distance de freinage, à 1 m prés, correspond à cette vitesse.

Exercice 3 (4 points)

1. a) Démontrer qu'il existe un couple (u, v) d'entiers relatifs tels que $19u + 12v = 1$.

b) Vérifier que pour un tel couple, le nombre $N = 13 \times 12v + 6 \times 19u$ est une solution du système (S) : $\begin{cases} n \equiv 13 (\text{mod} 19) \\ n \equiv 6 (\text{mod} 12) \end{cases}$.

2. Soit n_0 une solution du (S).

a) Vérifier que : le système (S) équivaut à $\begin{cases} n \equiv n_0 (\text{mod} 19) \\ n \equiv n_0 (\text{mod} 12) \end{cases}$.

b) Démontrer que : le système (S) équivaut à $n \equiv n_0 (\text{mod}\ 12 \times 19)$.

3. a) Trouver un couple (u,v) solution de l'équation $19u+12v=1$ et calculer la valeur de N correspondante.
   b) Déterminer l'ensemble des solutions de (S).

4. A la première gare de péage d'une autoroute, il entre à l'autoroute toutes les 12 secondes une voiture et sorte de l'autoroute une voiture toutes les19 secondes. On a aperçu la première voiture entrait à $0'06''$ et la première sortait à $0'12''$.
A quelle heure, deux voitures l'une entrante et l'autre sortante se croisent-elles pour la première fois dans cette gare ?

Exercice 4 (5 points)

Une usine est spécialisée dans la fabrication en série d'un article. Un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par cette usine pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de D_1 avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut D_2 avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi les deux défauts D_1 et D_2 étaient indépendants.
Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des défauts.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement D : « un article fabriqué par cette usine est défectueux » est égale à 0,0494.

2. Un dépositaire (grossiste) reçoit 800 articles de cette usine. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.
   a) Définir la loi de probabilité de X.
   b) Calculer l'espérance mathématique de X. Interpréter le résultat obtenu.

3. a) Un petit commerçant passe une commande de 25 articles de la société S chez ce dépositaire.
   Calculer, à 10^{-3} prés, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.
   b) Ce petit commerçant veut que, sur sa commande, la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste intérieure à 50%.
   Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4. La variable aléatoire T, qui à tout article fabriqué par cette usine associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}0007$.
   On donnera, pour les calculs, la valeur exacte puis la valeur arrondie à 10^{-3} prés.
   a) Quelle est la probabilité qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours ?
   b) Sachant qu'un article a fonctionné plus de 700 jours, calculer la probabilité qu'il tombe en panne avant 1 000 jours.
   c) Sachant qu'un article a fonctionné plus de 700 jours, calculer la probabilité qu'il ne tombe pas en panne avant 1 000 jours.
   d) On admet que la durée de vie moyenne d'un tel article est $T_m = \lim\limits_{A\to+\infty}\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x}dx$.
   Déterminer, à un jour près, T_m.

Exercice 5 (5 points)

Dans tout l'exercice, n désigne un entier naturel supérieur ou égal à 2.

Partie A : On considère l'équation différentielle (E) : $y' + ny = x + \frac{1}{n}$.

1. Déterminer les réels a et b pour que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = ax + b$ soit solution de (E).

2. Résoudre l'équation (E') : $y' + ny = 0$.

3. Montrer qu'une fonction h est solution de (E) si, et seulement si, la fonction h - g est solution de (E').

4. En déduire toutes les solutions de (E).

Partie B : Soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$ par : $f_n(x) = \frac{x}{n} - e^{-nx}$.

1. a) Vérifier que f_n est la solution de l'équation (E) qui prend la valeur -1 en 0.

   b) Etudier les variations de f_n.

2. a) Montrer que l'équation, d'inconnue x, $f_n(x) = 0$ admet une unique solution a_n strictement positive.

   b) Montrer que pour tout réel x positif, $e^x \geq x + 1$. En déduire la signe de $f_n(1)$.

   c) Prouver que pour tout $n \geq 2$, $\frac{1}{n} < a_n < 1$.

3. a) Vérifier que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1}\left[n\left(e^{a_n} - 1\right) - 1\right]$.

   b) Prouver que pour tout entier $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) > 0$.

   c) En déduire que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante et convergente.

4. On note $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$.

   a) Montrer que pour tout entier $n \geq 2$, $a \leq a_n$ puis $a \leq ne^{-na}$.

   b) En déduire que a = 0.

Corrigé

Exercice 1 :

1. b) ; 2.b) ; 3. a) ; 4.a)

Exercice 2 :

1. a) La moyenne de x est $\overline{x} = 75$ et celle d est $\overline{d} = 98,6$ donc $G(\overline{x} = 75, \overline{d} = 98,6)$.
   b) La forme du nuage de points n'est allongée donc un ajustement affine de la série (x, d) n'est pas justifié.
2. a) On pose $y_i = \sqrt{d_i}$.

x_i	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120
y_i	4,24	5,10	6,32	7,62	8,72	9,90	10,95	12,17	13,42	14,56

b) une équation de la droite de régression (D) de y en x par la méthode des moindres carrés est : $y = 0,12x + 0,59$.

c) Si x = 140 alors $y = 0,12 \times 140 + 0,59 = 17,39$.

D' où $d = y^2 = (17,39)^2 \approx 302$.

Ainsi lorsque la vitesse est 140 km/h, la distance de freinage est de 302 m.

Exercice 3 :

1. 19 et 12 sont premiers entre eux donc le théorème de Bézout assure l'existence d'un couple vérifiant cette condition.

$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13(1 - 19u) + 6 \times 19u = 13 - 7u \times 19$ donc $N \equiv 13(\text{mod}19)$.

De même :

$N = 13 \times 12v + 6 \times 19u = 13 \times 12v + 6 \times 19(1 - 12v) = 6 + 7v \times 12$ donc $N \equiv 6(\text{mod}12)$.

2. a) Soit n_0 une solution de (S).

n est solution de (S) $\Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv 13(\text{mod}19) \\ n \equiv 6(\text{mod}12) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} n \equiv n_0(\text{mod}19) \\ n \equiv n_0(\text{mod}12) \end{cases}$

b) Si $n \equiv n_0(\text{mod}12 \times 19)$ alors $n \equiv n_0(\text{mod}12)$ et $n \equiv n_0(\text{mod}19)$ donc

$\begin{cases} n \equiv n_0(\text{mod}19) \\ n \equiv n_0(\text{mod}12) \end{cases}$.

Réciproquement :

Si $\begin{cases} n \equiv n_0(\text{mod}19) \\ n \equiv n_0(\text{mod}12) \end{cases}$, alors il existe deux entiers relatifs k et k' tels que $n - n_0 = 19k$ et $n - n_0 = 12k'$ donc $19k = 12k'$.

19 divise donc $12k$. Comme 19 et 12 sont premiers entre eux, d'après le théorème de Gauss, 19 divise k' donc $k' = 12p$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte : $n - n_0 = 12 \times 19p$ donc $n \equiv n_0 (\text{mod} 12 \times 19)$.

3. a) Appliquons l'algorithme d'Euclide :

$19 = 1 \times 12 + 7$	$-5 \times (19 = 1 \times 12 + 7)$
$12 = 7 \times 1 + 5$	$3 \times (12 = 7 \times 1 + 5)$
$7 = 5 \times 1 + 2$	$-2 \times (7 = 5 \times 1 + 2)$
$5 = 2 \times 2 + 1$	$1 \times (5 = 2 \times 2 + 1)$

D'où :

$1 \times 5 - 2 \times 7 + 3 \times 12 - 5 \times 19 = 2 \times 2 + 1 - 2 \times 5 - 2 \times 2 + 3 \times 7 + 3 \times 5 - 5 \times 12 - 5 \times 7$

$\Leftrightarrow 5 - 2 \times 7 + 3 \times 12 - 5 \times 19 = 1 + 5 - 2 \times 7 - 5 \times 12$

$\Leftrightarrow 19 \times (-5) + 12 \times 8 = 1$

Ainsi le couple (u, v) = (-5, 8) est uns solution de l'équation 19u +12v= 1.

b) N= 678 est une solution de (S). D' »après la question 2.b), les solutions de (S) sont tous les nombres n tels que $n \equiv N(\text{mod} 12 \times 19)$ c'est-à-dire $n \equiv 678(\text{mod} 228)$ ou encore $n = 678 + 228k, k \in \mathbb{Z}$.

Or 678 = $2 \times 228 + 222$ donc $n = 222 + 2 \times 228 + 228k = 222 + 228(2 + k), k \in \mathbb{Z}$.

Il en résulte que $n = 222 + 228k', k' \in \mathbb{Z}$

4. Le temps t, en secondes, qu'une voiture entre à l'autoroute est : $t \equiv 6(\text{mod} 12)$ et celui t, en secondes, qu'une voiture sorte de l'autoroute est : $t \equiv 12(\text{mod} 19)$; il en résulte que le temps t, en secondes, que deux voitures se croisent est solution du système (S') :

$$\begin{cases} t \equiv 12(\text{mod} 19) \\ t \equiv 6(\text{mod} 12) \end{cases}$$

Comme le couple (u, v) = (-5, 8) est solution de l'équation 19u +12v= 1 alors

$t_0 = 12 \times 12v + 6 \times 19u = 144 \times (-5) + 144 \times 8 = 144 \times 3 = 342$

Par suite $t \equiv t_0 (\text{mod} 12 \times 19) \Leftrightarrow t \equiv 342(\text{mod} 228)$.

L'heure, où deux voitures l'une entrante et l'autre sortante se croisent pour la première fois dans cette gare est : $342'' = 05'42''$.

Exercice 4 :

1. Désignons par :
 D_1 : « l'article présente le défaut D_1 » et D_2 : « l'article présente le défaut D_2 »
 Remarquons aussi que $D = D_1 \cup D_2$.
 $p(D) = p(D_1 \cup D_2) = p(D_1) + p(D_2) - p(D_1 \cap D_2) = 0,02 + 0,03 - 0,0006 = 0,0494$.
2. a) La variable aléatoire X suit la loi binomiale B(800 ; 0,0494) donc sa loi de probabilité est définie par :
 $p(X = k) = C_{800}^{k}(0,0494)^k \times (1 - 0,0494)^{800-k} = C_{800}^{k}(0,0494)^k \times (0,9506)^{800-k}$
 avec $k \in \{0,1,2,\ldots,800\}$.
 b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = 800 \times 0,0494 = 39,52$.
 Dans ce lot de 800 articles, on estime trouver au environ de 40 articles défectueux.
3. a) Désignons par Y_{25} la variable aléatoire qui suit la loi binomiale B(25 ; 0,0494).

La probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans la commande de ce petit commerçant est :

$$p(Y_{25} \geq 2) = 1 - [p(Y_{25} = 0) + p(Y_{25} = 1)] = 1 - \left[(0,9506)^{25} + C_{25}^{1}(0,0494) \times (0,9506)^{24}\right] \approx 0,352.$$

b) $p(Y_n \geq 1) \leq 0,5 \Leftrightarrow 1 - p(Y_n = 0) \leq 0,5 \Leftrightarrow p(Y_n = 0) \geq 0,5 \Leftrightarrow (0,9506)^n \geq 0,5$

$$\Leftrightarrow n\ln(0,9506) \geq \ln(0,5) \Leftrightarrow n \leq \frac{\ln(0,5)}{\ln(0,9506)}$$

Or $\dfrac{\ln(0,5)}{\ln(0,9506)} \approx 13,68$, il en suit : $n \leq 13$.

Donc la valeur maximale du nombre d'articles qu'il peut commander est **n = 13.**

4. a) $p(700 \leq T \leq 1000) = e^{-700\lambda} - e^{-1000\lambda} = e^{-0,49} - e^{-0,7} \approx 0,116$.

b) $p\big((T \leq 1000) | (T \geq 700)\big) = \dfrac{p(700 \leq T \leq 1000)}{p(T \geq 700)} = \dfrac{e^{-0,49} - e^{-0,7}}{e^{-0,49}} = 1 - e^{-0,21} \approx 0,189$.

c) $p\big((T \geq 1000) | (T \geq 700)\big) = \dfrac{p((T \geq 1000) \cap (T \geq 700))}{p(T \geq 700)} = \dfrac{p(T \geq 1000)}{p(T \geq 700)} = \dfrac{e^{-0,7}}{e^{-0,49}} = e^{-0,21}$

D'où $p\big((T \geq 1000) | (T \geq 700)\big) \approx 0,811$.

d) Calculons d'abord par une intégration par parties l'intégrale : $I(A) = \displaystyle\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$.

Pour cela, on pose :

Pour cela, on pose : $u(x)=x$ $u'(x)=1$

$v'(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ $v(x)=-e^{-\lambda x}$

On obtient :

$$I(A)=\left[-x e^{-\lambda x}\right]_0^A+\int_0^A e^{-\lambda x}dx=-Ae^{-\lambda A}+\left[-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\right]_0^A$$

$$=-Ae^{-\lambda A}-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda A}+\frac{1}{\lambda}=\frac{-\lambda Ae^{-\lambda A}-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}$$

Il en résulte : $\lim\limits_{A\to+\infty} I(A)=\lim\limits_{A\to+\infty}\frac{\left(-\lambda Ae^{-\lambda A}\right)-e^{-\lambda A}+1}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{0,0007}\approx 1429$.

Exercice 5 :

Partie A :

1. g est une solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $g'(x)+ng(x)=x+\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $nax+nb+a=x+\frac{1}{n}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}na=1\\ nb+a=\frac{1}{n}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a=\frac{1}{n}\\ b=0\end{cases}$$

2. $y'+ny=0\Leftrightarrow y'=-ny\Leftrightarrow y=ke^{-nx}$, $k\in\mathbb{R}$.

3. H est solution de (E) $\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $h'(x)+nh(x)=x+\frac{1}{n}$

$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $h'(x)+nh(x)=g'(x)+ng(x)$

$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $h'(x)-g'(x)+n\left(h(x)-g(x)\right)=0$

$\Leftrightarrow$ pour tout x réel, $(h'-g')(x)-n(h-g)(x)=0$

$\Leftrightarrow$ h - g est solution de (E').

4. Les solutions de (E) sont donc les fonctions h définies sur $\mathbb{R}$ par :

$h(x)-g(x)=ke^{-nx}$, $k\in\mathbb{R}\Leftrightarrow h(x)=g(x)+ke^{-nx}$, $k\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow h(x)=\frac{x}{n}+ke^{-nx},\ k\in\mathbb{R}.$$

Partie B

1. a) On a :

- ✓ pour tout x réel, $f_n(x)=\dfrac{x}{n}-e^{-nx}=\dfrac{x}{n}+k.e^{-nx}$ avec $k=-1$
- ✓ $f_n(0)=0-e^0=-1$.

Donc f_n est la solution de l'équation (E) qui prend la valeur -1 en 0.

b) Comme $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{n}=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-nx}=0$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty}f_n(x)=+\infty$.

f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout x réel , $f_n'(x)=\dfrac{1}{n}+ne^{-nx}>0$.

D'où le tableau de variation suivant :

x	0	$+\infty$
$f_n'(x)$	+	
$f_n(x)$	-1 ↗	$+\infty$

2. a) On a : f_n est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, $f_n([0,+\infty[)=[-1,+\infty[$ et $0\in[-1,+\infty[$ donc l'équation $f_n(x)=0$ admet une unique solution a_n dans $[0,+\infty[$.
Comme $f_n(0)=-1$ alors $f_n(0)\neq 0$ donc $a_n>0$.

b) On sait que pour tout t positif, $e^t\geq 1$ donc pour tout réel x **positif** ,

$$\int_0^x e^t dt\geq\int_0^x dt\Leftrightarrow e^x-1\geq x\Leftrightarrow e^x\geq x+1.$$

$$f_n(1)=\frac{1}{n}-e^{-n}=\frac{1}{n}-\frac{1}{e^n}=\frac{e^n-n}{ne^n}\ ;$$

or pour tout $n\geq 2$, $e^n\geq n+1\Leftrightarrow e^n-n\geq 1$, donc $f_n(1)>0$.

c) Pour tout $n\geq 2$, $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=\dfrac{1}{n^2}-e^{-1}=\dfrac{1}{n^2}-\dfrac{1}{e}=\dfrac{e-n^2}{ne}$;

Or $2\leq e\leq 3$ et $n^2\geq 4$ ou encore $-n^2\leq -4$ donc $e-n^2\leq -1<0$ d'où $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)<0$.

Ainsi, $f_n\left(\frac{1}{n}\right) < f_n(a_n) < f_n(1)$ et comme f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, alors $\frac{1}{n} < a_n < 1$.

3. a) Pour tout $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_n) = \frac{a_n}{n+1} - e^{-(n+1)a_n} = \frac{a_n - (n+1)e^{-(n+1)a_n}}{n+1}$

$$= \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1}\left[a_n e^{(n+1)a_n} - (n+1)\right] = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1}\left[a_n e^{a_n} e^{na_n} - (n+1)\right]$$

Or $f_n(a_n) = 0 \Leftrightarrow \frac{a_n}{n} - e^{-na_n} = 0 \Leftrightarrow e^{-na_n} = \frac{a_n}{n} \Leftrightarrow e^{na_n} = \frac{n}{a_n}$, il en résulte :

$$f_{n+1}(a_n) = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1}\left[a_n e^{a_n}\frac{n}{a_n} - (n+1)\right] = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1}\left[ne^{-a_n} - (n+1)\right] = \frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1}\left[n\left(e^{a_n} - 1\right) - 1\right]$$

b) On a pour tout $n \geq 2$, $e^{a_n} \geq a_n + 1 \Leftrightarrow e^{a_n} - 1 \geq a_n \Leftrightarrow n\left(e^{a_n} - 1\right) \geq na_n$

or $a_n > \frac{1}{n}$ donc $na_n > 1$ d'où $n\left(e^{a_n} - 1\right) > 1$.

Par suite $n\left(e^{a_n} - 1\right) - 1 > 0$ et comme $\frac{e^{-(n+1)a_n}}{n+1} > 0$ alors $f_{n+1}(a_n) > 0$.

b) On sait que, pour tout $n \geq 2$, $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ donc $f_{n+1}(a_n) > 0 \Leftrightarrow f_{n+1}(a_n) > f_{n+1}(a_{n+1})$.
Or la fonction f_{n+1} est strictement croissante sur $[0,+\infty[$, donc nécessairement $a_n > a_{n+1}$ d'où la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est décroissante.
La suite $(a_n)_{n\geq 2}$ étant positive donc minorée par 0. Il en résulte que la suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente.

4. a) La suite $(a_n)_{n\geq 2}$ est convergente donc $(a_n)_{n\geq 2}$ est bornée .

Soit $a = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$, $(a_n)_{n\geq 2}$ est donc minorée par a ou encore pour tout $n \geq 2$, $a_n \geq a$.

fonction f_n est strictement croissante sur $[0,+\infty[$ et pour tout $n \geq 2$, $a_n \geq a$ donc

$f_n(a_n) \geq f_n(a) \Leftrightarrow 0 \geq f_n(a) \Leftrightarrow \frac{a}{n} - e^{-na} \leq 0 \Leftrightarrow a \leq ne^{-na}$.

b) On sait que $a \geq 0$.
supposons que a > 0, il en résulte que :

$a \leq \lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-na}$ or $\lim\limits_{n\to+\infty} ne^{-na} = \lim\limits_{n\to+\infty} -\frac{1}{a}\left(-nae^{-na}\right) = -\frac{1}{a} \times 0 = 0$ absurde

Donc a = 0.