

Exercice 1



Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5% de ce cheptel.

- 1 On choisit au hasard un animal dans ce cheptel. Quel est la probabilité qu'il soit malade ?
- 2
 - a On choisit successivement et au hasard dix animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.
Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
Calculer son espérance mathématique.
 - b On désigne par :
 - ◇ A l'évènement « aucun animal est malade parmi les dix » ;
 - ◇ B l'évènement « au moins un animal est malade parmi les dix ».
 Calculer $p(A)$ et $p(B)$.
- 3 On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est 0,8. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est 0,9. On note T l'évènement « avoir un test positif à cette maladie » et M l'évènement « être atteint de cette maladie ».
 - a Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
 - b Calculer la probabilité de l'évènement T .
 - c Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif ?

Exercice 2



Un jardinier dispose de deux lots 1 et 2 contenant chacun de très nombreux bulbes donnant des tulipes de couleurs variées.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 1 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{4}$.

La probabilité pour qu'un bulbe du lot 2 donne une tulipe jaune est égale à $\frac{1}{2}$.

Ce jardinier choisit au hasard un lot et plante 50 bulbes de tulipes.

Soit n un entier naturel vérifiant $0 \leq n \leq 50$. On définit les évènements suivants :

- ◇ A : « le jardinier a choisi le lot 1 »
- ◇ B : « le jardinier a choisi le lot 2 »

◇ J_n : « le jardinier obtient n tulipes jaunes ».

- 1**
- (a) Quelle loi de probabilité suit X le nombre de tulipes jaunes obtenues à partir de 50 bulbes du lot 1?
 - (b) Quelle est l'espérance mathématique de X ?
 - (c) Donner une expression de la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
 - (d) Calculer la probabilité que le jardinier obtienne 15 tulipes jaunes. On donnera l'arrondi au millième du résultat.
- 2**
- (a) Montrer que $p(J_n | B) = C_{50}^n 2^{-50}$.
 - (b) En déduire la probabilité que le jardinier obtienne n tulipes jaunes.
 - (c) On note p_n la probabilité conditionnelle de l'évènement A sachant que J_n est réalisé.
Établir que $p_n = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$.
 - (d) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p_n \geq 0,9$?
Comment peut-on interpréter ce résultat?.

Exercice 3



On désigne par n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On considère n urnes U_1, U_2, \dots et U_n de composition comme suit : U_1 contient 2 jetons noirs et 1 jeton blanc et chacune des autres urnes contient 1 jeton noir et 1 jeton blanc.

On tire au hasard un jeton de U_1 qu'on place dans U_2 , puis on tire un jeton de U_2 qu'on place dans U_3 et ainsi de suite ... on tire un jeton de U_{n-1} qu'on place dans U_n .

Pour tout entier k tel que $0 \leq k \leq n$, on note E_k l'évènement « le jeton tiré de U_k est blanc ».

- 1**
- (a) Calculer $p(E_1)$, $p(E_2 | E_1)$ et $p(E_2 | \bar{E}_1)$. En déduire $p(E_2)$.
 - (b) Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n$, on note $p_k = p(E_k)$.
Montrer que $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

- 2** On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}$.
On considère la suite (v_k) définie sur \mathbb{N}^* par $v_k = u_k - \frac{1}{2}$.

- (a) Montrer que (v_k) est une suite géométrique dont on précisera la raison.
 - (b) Donner l'expression de v_k en fonction de k .
- 3**
- (a) En déduire la valeur de p_k .
 - (b) Déterminer le plus petit entier k telle que $0,4999 < p_k < 5$.

Exercice 1



1 La probabilité que l'animal soit malade est $\frac{0,5}{100} = 0,005$.

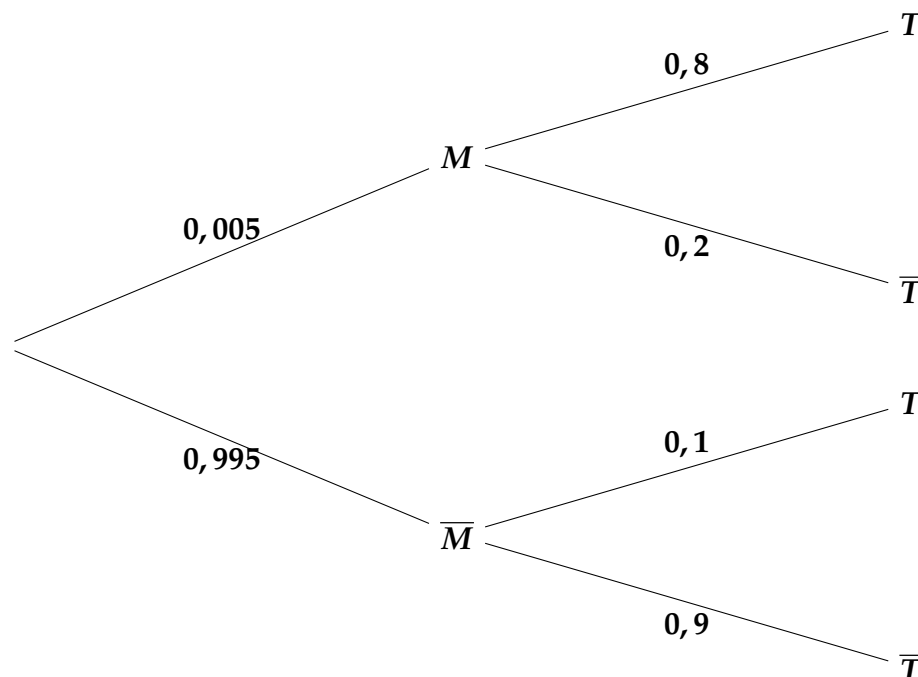
2 (a) On suppose que le cheptel est assez important donc le tirage successif de 10 animaux est une épreuve de Bernoulli de paramètre $n = 10$ et $p = 0,005$.

On a $E(X) = n \times p = 0,05$.

(b) On a $p(A) = C_{10}^0 \times (0,005)^0 \times (0,995)^{10} = 0,995^{10} \simeq 0,951$.

On a $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,995^{10} \simeq 0,049$.

3 (a) On a l'arbre suivant :



(b) On a : $p(T) = p(M \cap T) + p(\bar{M} \cap T) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,1035$.

(c) $p(M | T) = \frac{p(T \cap M)}{p(T)} = \frac{0,005 \times 0,8}{0,1035} \simeq 0,038$.

Exercice 2



1 (a) la variable aléatoire X suit la loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{4}$.

(b) L'espérance mathématique de X est $E(X) = n \times p = 12,5$ (tulipes jaunes).

(c) On a $p(X = n) = C_{50}^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} = C_{50}^n \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

(d) $p(X = 15) = C_{50}^{15} \times \left(\frac{1}{4}\right)^{15} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{35} \simeq 0,089$.

2 (a) Si le lot choisi est 2, on a autant de chances d'avoir une tulipe jaune que le contraire. La loi binomiale ici a pour paramètres $n = 50$ et $p = \frac{1}{2}$.

La probabilité d'obtenir n tulipes jaunes est donc :

$$p(J_n | B) = C_{50}^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{50-n} = C_{50}^n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{50} = C_{50}^n \times 2^{-50}.$$

(b) De la même façon que précédemment $p(J_n | A) = C_{50}^n \times \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \left(\frac{3}{4}\right)^{50-n} = C_{50}^n \frac{3^{50-n}}{4^{50}}$.

A et B forment une partition de l'univers, donc d'après la formule de probabilité totale :

$$p(J_n) = p(J_n \cap A) + p(J_n \cap B) = p(A)p(J_n | A) + p(B)p(J_n | B)$$

$$= \frac{1}{2} \times C_{50}^n \frac{3^{50-n}}{4^{50}} + \frac{1}{2} \times C_{50}^n \times 2^{-50} = \frac{1}{2} C_{50}^n \frac{3^{50-n} + 2^{50}}{4^{50}}.$$

(c) $p_n = p(A | J_n) = \frac{p(A \cap J_n)}{p(J_n)} = \frac{p(J_n | A) \times p(A)}{p(J_n)} = \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}}$.

(d) $p_n \geq 0,99 \iff \frac{3^{50-n}}{3^{50-n} + 2^{50}} \geq 0,99 \iff 3^{50-n} \geq 0,9(3^{50-n} + 2^{50})$

$$\iff 0,1 \times 3^{50-n} \geq 0,9 \times 2^{50} \iff (50-n)\ln 3 \geq \ln(9 \times 2^{50}) \iff n \leq 50 - \frac{\ln(2^{50} \times 9)}{\ln 3}$$

d'où $n \leq 16,4$. Par suite, il faut que $n < 17$.

Interprétation : si le nombre de tulipes jaunes est peu élevé (ici moins de 17), la probabilité d'avoir choisi le lot 1 est très grande; si ce nombre de tulipes jaunes se rapproche de 25 sur 50, la probabilité est grande que le lot choisi soit le lot 2.

Exercice 3



1 (a) $p(E_1) = p_1 = \frac{1}{3}$.

L'urne U_2 contient à présent 2 jetons blancs et 1 jeton noir donc $p(E_2 | E_1) = \frac{2}{3}$ et $p(E_2 | \bar{E}_1) = \frac{1}{3}$.

$$p(E_2) = p(E_1) \times p(E_2 | E_1) + p(\bar{E}_1) \times p(E_2 | \bar{E}_1) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}.$$

(b) $p_{k+1} = p(E_{k+1}) = p(E_{k+1} \cap E_k) + p(E_{k+1} \cap \bar{E}_k) = p(E_k) \times p(E_{k+1} | E_k) + p(\bar{E}_k) \times p(E_{k+1} | \bar{E}_k) = p_k \times \frac{2}{3} + (1 - p_k) \times \frac{1}{3} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$.

2 On note (u_k) la suite définie par $u_1 = \frac{1}{3}$ et, pour tout entier $k \geq 1$, $u_{k+1} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3}$.

(a) $v_{k+1} = u_{k+1} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}u_k - \frac{1}{6} = \frac{1}{3}(u_k - \frac{1}{2}) = \frac{1}{3}v_k$. Donc (v_k) est une suite géométrique de raison $q = \frac{1}{3}$.

(b) On a $v_1 = u_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$

donc pour tout entier $k \geq 1$, $v_k = v_1 \times q^{k-1} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k$.

3 (a) $p_{k+1} = \frac{1}{3}p_k + \frac{1}{3}$ donc la suite (u_n) est la suite (p_n) , d'où $p_k = u_k = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k$.

$$0,4999 < p_k < 0,5 \iff 0,4999 < \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k < 0,5 \iff -0,0001 < -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^k < 0$$

$$\iff 0 < \left(\frac{1}{3}\right)^k < 0,0002 \iff k \ln\left(\frac{1}{3}\right) < \ln(0,0002) \iff k > \frac{\ln(0,0002)}{\ln\left(\frac{1}{3}\right)}$$

d'où $k > 7,75$. Donc, on a : $0,4999 < p_k < 0,5$ pour $k = 8$.