Mr Farid Abidi Mathématiques	Révision bac 2020	Classes : 4 S.Tec Durée 3 h *** Coef. 3

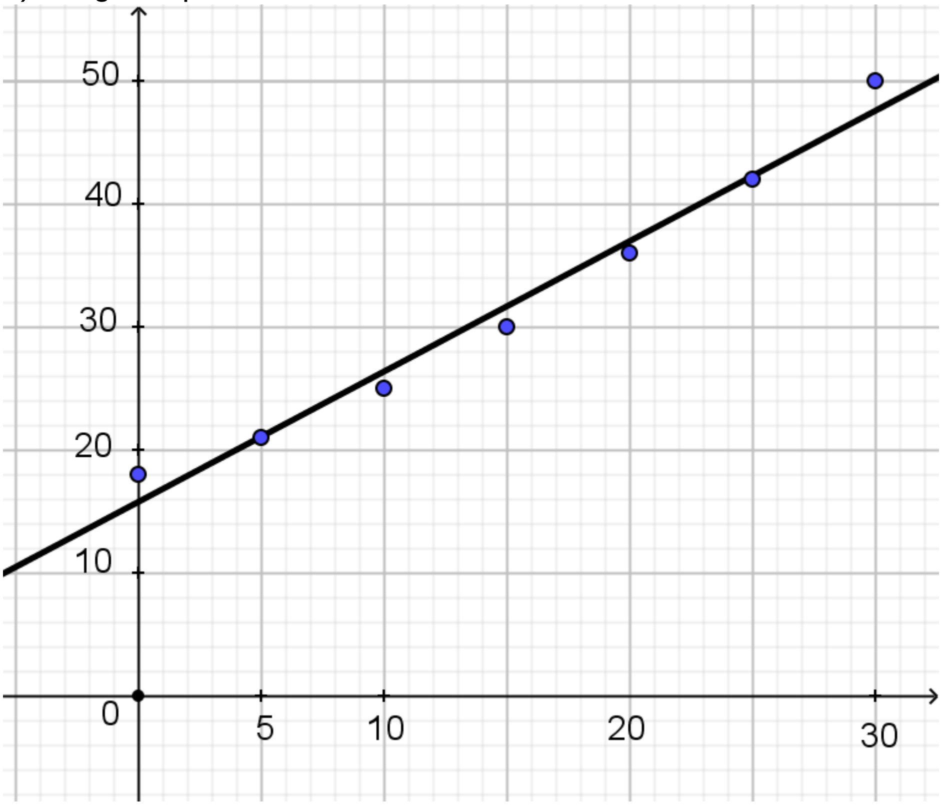
Le sujet comporte quatre pages numérotées 1/4 , 2/4 , 3/4 et 4/4 - la page 4/4 est à compléter et à rendre .

Exercice 1 :

Partie A

1) D : $y = 1{,}06.X + 15{,}75$

2) nuage de points et D :



3) Le rang de l'année 2017 est : 33 ,

Pour $x = 33$, $y = 1{,}05.33 + 15{,}75 = 50{,}73$ donc $y \approx 51$.

Partie B

1) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \alpha e^{\beta x}$ où α et β sont deux réels.

f(0) =18 donc $\alpha = 18$ et f(30) = 50 donc $\alpha e^{30\beta} = 50$ donc $e^{30\beta} = \frac{25}{9}$ donc $\beta = \frac{1}{30}\ln\left(\frac{25}{9}\right) \approx 0.034$.

2) Pour tout x de $[0,+\infty[$, $f(x) = 18e^{0{,}034.x}$. Une estimation de la population en 2017 est $f(33) = 18e^{1.122} \approx 55$.

3) La population en 2017 était de 54 milliers, 55 – 54 =1 et 54 – 51 = 3 donc l'ajustement f est le plus pertinent.

Exercice 2 :

1. a)

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f(x)	-	0	+

b) la droite des abscisses est une asynptote à (C) au voisinage de $+\infty$.

c) T : $y = f'(0)x + f(0)$ donc $T : y = 2ex$.

2. Pour tout réel x, $f(x) = 2xe^{1-x}$.

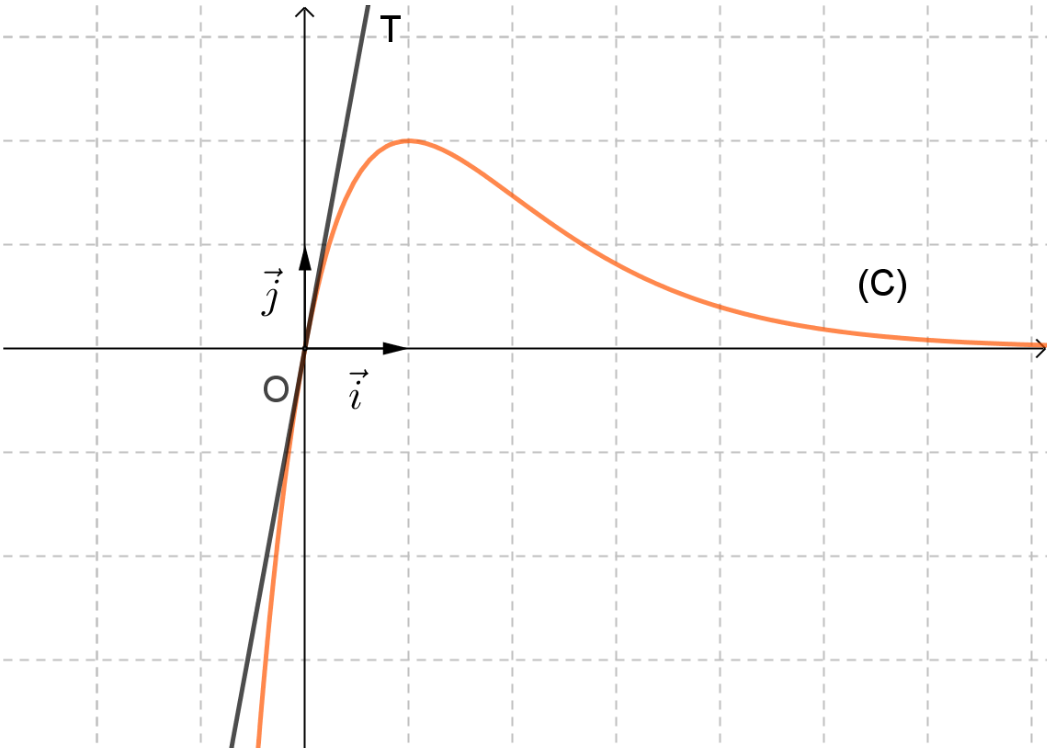
a) $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2e^{1-x} = +\infty$ donc (C) admet une branche parabolique au voisinage de $-\infty$ de direction $(O, \vec{j})$.

b) Pour tout réel x, $f(x) = 2e^{1-x} - 2xe^{1-x} = (2-2x)e^{1-x} = -2e^{1-x} - (2-2x)e^{1-x} = (2x-4)e^{1-x}$.

x	$-\infty$		2		$+\infty$
2x-4		-	0	+	
f'(x)		-	0	+	

Donc le point I de (C) d'abscisse 2 est un point d'inflexion.

c) (C) et (T).



3. a) On pose : u(x) = x , u'(x) = 1

v'(x) = e^{1-x} , v(x) = $-e^{1-x}$

$$J = \int_0^1 xe^{1-x}dx = \left[-xe^{1-x}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{1-x}dx = -1 + \left[-e^{1-x}\right]_0^1 = -1 + (-1+e) = e-2 .$$

b) (C) est située au-dessus de (OI) sur [0, 2] et (OI) : $y = e^{-1}x$ donc l'aire de la partie du plan limitée par (C) et la droite (OI) est

$$\int_0^1 \left(f(x) - e^{-1}x\right)dx = \int_0^1 \left(2xe^{1-x} - e^{-1}x\right)dx = 2J - e^{-1}\left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = 2(e-2) - \frac{e^{-1}}{2} = 2e - \frac{e^{-1}}{2} - 4 .$$

Exercice 3:

1. On prélève au hasard un composant dans la production. On nomme D l'évènement « le composant présente un défaut » et L l'évènement «le composant a une durée de vie longue ».

a) p(D) = $\frac{5}{100} = 0,05$ et $p\left(L \middle| \overline{D}\right) = \frac{80}{100} = 0,8$.

b) En déduire p(L) = $p\left(L \cap D\right) + p\left(L \cap \overline{D}\right) = p\left(D\right).0 + p\left(\overline{D}\right).p\left(L \middle| \overline{D}\right) = \left(1 - 0,05\right) \times 0,8 = 0,76$.

c) $p\left(L \middle| \overline{D}\right) = 0,8$ et p(L) = 0,76 donc $p\left(L \middle| \overline{D}\right) \neq p(L)$ donc L et $\overline{D}$ ne sont pas indépendants donc L et D ne sont pas indépendants.

2. a) $p(X < 2000) = \frac{20}{100}$ donc $1 - e^{-2000\lambda} = 0,2$ donc $e^{-2000\lambda} = 0,8$ donc $-2000\lambda = \ln\left(0,8\right)$ donc $\lambda = -\frac{\ln\left(0,8\right)}{2000}$.

b) $p(X > 6000) = e^{-6000\lambda} = e^{3\ln(0,8)} = 0,512$.

c) $p\left(\left(X > 7000\right) \middle| \left(X > 2000\right)\right) = \frac{p\left(\left(X > 7000\right) \cap \left(X > 2000\right)\right)}{p(X > 2000)} = \frac{p\left(\left(X > 7000\right)\right)}{p(X > 2000)} = \frac{e^{-7000\lambda}}{e^{-2000\lambda}} = e^{-5000\lambda} = e^{\frac{5}{2}\ln(0,8)} \approx 0,572$

Exercice 4:

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$. On considère les points $A\left(1,1,0\right)$, $B\left(-1,2,1\right)$ et $C\left(0,1,1\right)$.

1. a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \neq \vec{0}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires donc les points A, B et C ne sont pas alignés et par suite les points A, B et C déterminent un plan (P).

$\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$ est un vecteur normal à (P) donc P : $x + y + z + d = 0$, $d \in \mathbb{R}$.

Comme A(1, 1, 0) appartient à p alors d = -2 donc P : $x + y + z - 2 = 0$.

2. $(\Delta):\begin{cases} x=-1 \\ y=-1+3\alpha \\ z=1-3\alpha \end{cases}$, $\alpha\in\mathbb{R}$.

$\vec{u}\begin{pmatrix}0\\3\\-3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ) , $\vec{u}.\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)=0+3-3=0$ donc $\vec{u}\perp\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)$

donc (Δ) est parallèle à (P).

Or Appartient à (P) et $\begin{cases} 0=-1 \\ 3=-1+3\alpha \\ -3=1-3\alpha \end{cases}$ (impossible) donc A n'appartient pas à (Δ).

Ainsi , (Δ) est strictement parallèle à (P).

3. a) Pour tout réel t,

$x^2+y^2+z^2+2x-2ty+2tz+t^2+t=0 \Leftrightarrow (x+1)^2-1+(y-t)^2-t^2+(z+t)^2-t^2+t^2+t=0$

$\Leftrightarrow (x+1)^2+(y-t)^2+(z+t)^2=t^2-t+1$

Comme $t^2-t+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}+1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$

alors, pour tout réel t, (S_t) est une sphère de centre $I_t(-1,t,-t)$ et de rayon $R_t=\sqrt{t^2-t+1}$.

b) Pour tout réel , $\begin{cases} -1=-1 \\ t=-1+3\alpha \\ -t=1-3\alpha \end{cases} \Leftrightarrow t=-1+3\alpha \Leftrightarrow \alpha=\frac{t+1}{3}$. Donc , lorsque t varie dans $\mathbb{R}$, I_t décrit la droite (Δ).

c) Pour tout réel t, $V_t=\frac{1}{6}\left|\vec{AI_t}.\left(\vec{AB}\wedge\vec{AC}\right)\right|=\frac{1}{6}|-1+t-t|=\frac{1}{6}$.

4. a) (S_t) est tangente à (P) $\Leftrightarrow d(I_t,P)=R_t \Leftrightarrow \frac{|-1+t-t-2|}{\sqrt{3}}=\sqrt{t^2-t+1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{3}=\sqrt{t^2-t+1} \Leftrightarrow t^2-t+1=3 \Leftrightarrow t^2-t-2=0 \Leftrightarrow t=-1$ ou $t=2$.

b) $R_{1-t}=\sqrt{(1-t)^2-(1-t)+1}=\sqrt{1-2t+t^2-1+t+1}=\sqrt{t^2-t+1}=R_t$ donc les sphères (S_t) et (S_{1-t}) ont le même rayon.

c) Le plan (P) coupe chacune des sphères (S_t) selon un cercle de rayon 2 équivaut à et

$d(I_t,P)^2 + 2^2 = R_t^2 \Leftrightarrow 3+4 = t^2 - t + 1 \Leftrightarrow t^2 - t - 6 = 0$.

le discriminant de $t^2 - t - 6 = 0$ est 25 sont les solutions sont 2 et -3 .