PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI NON VIDE

PROPOSÉ PAR M. ABIDI FARID

Exercice 2:

1. On dispose d'une urne U contenant 3 boules rouges et 7 boules noires.

On extrait simultanément une paire de boules de cette urne ; on considère

que tous les tirages sont équiprobables.

a) Quelle est la probabilité p_1 que les deux boules tirées soient rouges ?

b) Quelle est la probabilité p_2 que les deux boules tirées soient noires ?

c) Quelle est la probabilité p_3 que les deux boules tirées soient de même couleur ?

d) Quelle est la probabilité p_4 que les deux boules tirées soient de couleurs différentes ?

2. On dispose aussi d'une deuxième urne V contenant 4 boules rouges et 6 boules noires. On tire maintenant deux boules simultanément de l'urne U et une boule de l'urne V ; on suppose que tous les tirages sont équiprobables.

On considère les événements suivants :

R : " les trois boules tirées sont rouges "

D : " les trois boules tirées sont de la même couleur "

B : " la boule tirée dans V est rouge ".

a) Calculer p(R).

b) Quelle est la probabilité de tirer trois boules de même couleur ?

c) Calculer la probabilité que la boule tirée de V est rouge sachant que les trois boules tirées ne sont pas de la même couleur .

3° On répète l’épreuve précédente 5 fois de suite en remettant à chaque fois les boules tirées dans leur urne d’origine, On suppose que toutes les épreuves sont deux à deux indépendantes, Soit X le nombre d’épreuve donnant trois boules rouges,

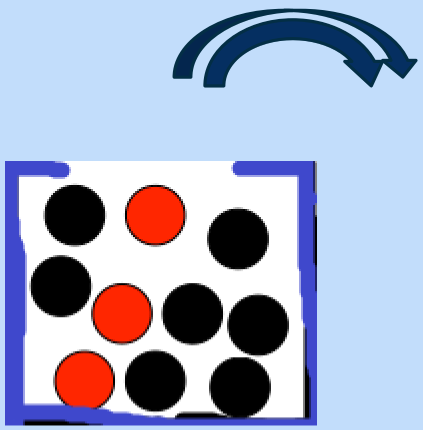
a) Déterminer la loi de probabilité de X.

b) Donner une valeur arrondie au millième de la probabilité

d’obtenir au moins deux fois trois boules rouges.

Corrigé:

1° Remarquons que le nombre de



tirages simultanés de deux boules parmi 10 dans l’urne U est

$$C_{10}^{2} = \frac{10 \times 9}{2} = 45$$

Il existe une autre notation $\binom{10}{2} = C_{10}^{2} = 45$

a) L’urne U contient 10 boules dont 3 sont rouges donc la probabilité de tirer simultanément deux boules rouges est :

$$p_1 = \frac{C_3^2}{C_{10}^2} = \frac{3}{45} = \frac{1}{15}$$

b) l'urne U contient 10 boules dont 7 sont noires donc la

probabilité de tirer simultanément deux boules noires est :

$$p_2 = \frac{C_7^2}{C_{10}^2} = \frac{21}{45} = \frac{7}{15}$$

c) La probabilité de tirer simultanément deux boules de

même couleur est : $p_3 = p_1 + p_2 = \frac{1}{15} + \frac{7}{15} = \frac{8}{15}$

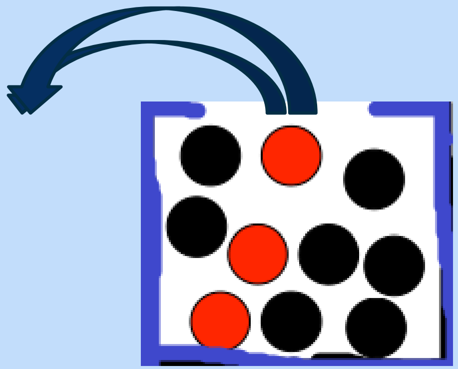
d) L’urne U contient 10 boules de deux couleurs et deux seulement donc l’évènement contraire de « les deux boules tirées sont de couleurs différentes » est « les deux boules sont de même couleur ».

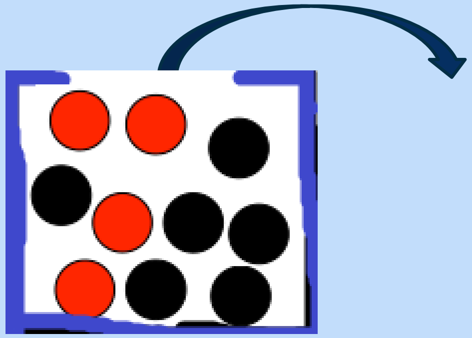
Ainsi, la probabilité de tirer deux boules de couleurs différentes est :

$$p_4 = 1 - \frac{8}{15} = \frac{7}{15}$$

2° On dispose des deux urnes : U qui contient 10 boules (3 boules rouges et 7 boules noires) et   V qui contient 10 boules (4 boules rouges et 6 boules noires) .

On tire **simultanément deux boules de U** et **une seule boule de V.**





a) Soit l’évènement R : " les trois boules tirées sont rouges "

autrement dit, il faut tirer simultanément deux boules rouges de U

et une boule rouge de V donc :

$$p(R)=\frac{C_3^2}{C_{10}^2}\times\frac{4}{10}=\frac{1}{15}\times\frac{2}{5}=\frac{2}{75}$$

b) D: « tirer 3 boules de même couleurs » est R ou l'évènement

« tirer deux boules noires de U et une boule noire de V » donc

$$p(D) = p(R) + \frac{C_7^2}{C_{10}^2} \times \frac{6}{10} = \frac{2}{75} + \frac{7}{15} \times \frac{3}{5} = \frac{23}{75}$$

c) Soit l’évènement « la boule tirée de V est rouge sachant que les trois boules tirées ne sont pas de la même couleur » , donc « tirer une boule rouge de V sachant que les deux boules tirées de U sont soient deux boules noires ou deux boules de couleurs différentes , donc cet évènement est $B|\overline{D}$.

Et sa probabilité est $$p\left(B\middle|\overline{D}\right)=\frac{p\left(B\cap\overline{D}\right)}{p\left(\overline{D}\right)}$$

On a : $$p\left(\overline{D}\right)=1-p\left(D\right)=1-\frac{23}{75}=\frac{52}{75}$$

Et l'évènement $B\cap\overline{D}$ est « tirer deux boules noires de U et une boule rouge de V » ou « tirer deux boules de couleurs différentes et une boule rouge de V »

$$p\left(B \cap \overline{D}\right) = \left(\frac{C_7^2}{C_{10}^2} + \frac{7}{15}\right) \times \frac{4}{10} = \left(\frac{7}{15} + \frac{7}{15}\right) \times \frac{2}{5} = \frac{28}{75}$$

D’où $$p\left(B \middle| \overline{D}\right) = \frac{p\left(B \cap \overline{D}\right)}{p\left(\overline{D}\right)} = \frac{\frac{28}{75}}{\frac{52}{75}} = \frac{28}{52} = \frac{7}{13}$$

3° On dispose d’une épreuve qui donne issue à deux éventualités R et $\overline{R}$ qu’on répète 5 fois de suite dans les mêmes conditions , Donc le schéma de Bernoulli est vérifié.

a) X la variable aléatoire égal au nombre d'épreuves où R est réalisé suit la loi binomiale de paramètres 5 et $p(R) = \dfrac{2}{75}$

La loi de probabilité de X est donnée par :

$$p(X = k) = C_5^k \left(\frac{2}{75}\right)^k \left(\frac{73}{75}\right)^{5-k} \quad , \quad où\ k \in \{0,1,2,3,4,5\}$$

b) La probabilité d’obtenir au moins deux fois trois boules

rouges est :

$$p(X \geq 2) = 1 - \left[p(X = 0) + p(X = 1) \right]$$
$$= 1 - \left[\left(\frac{73}{75} \right)^5 + 5\left(\frac{2}{75} \right)\left(\frac{73}{75} \right)^4 \right]$$

D’où $p(X \geq 2) \simeq 0{,}126$

Merci et à bientôt

M, Farid Abidi