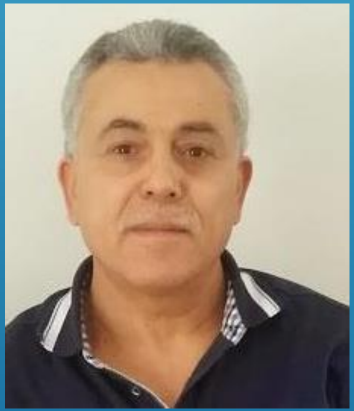
PROBABILITÉS SUR UN ENSEMBLE FINI NON VIDE

PROPOSÉ PAR M. ABIDI FARID



Exercice 1:

On dispose d'un dé cubique et homogène dont les faces sont numérotées : -1, -1, - 1, 0, 1 et 1. On jette ce dé deux fois de suite et on note à chaque fois le numéro de la face supérieure.

1° Déterminer la probabilité de chacun des neufs évènements élémentaires.

2° Déterminer la probabilité de chacun des événements A et B

suivants :

A :"les deux numéros sont différents"

B :" la somme des deux numéros obtenus est égale à 0".

3° Soit C : « les deux numéros obtenus sont différents sachant

que leur somme est nulle ».

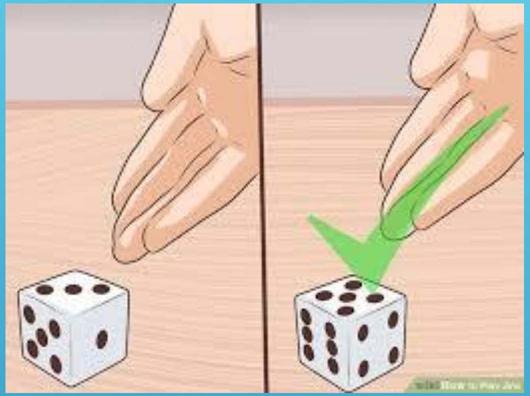
Calculer p(C).

4° Soit X la variable aléatoire qui à l'issue des deux lancers associe la valeur absolue de la somme des deux nombres obtenus.

Déterminer la loi de probabilité de X.

Corrigé:

Remarquons qu'on peut



assimiler cette épreuve

à deux tirages successifs avec remise, mais lorsqu'on

lance deux dés Identiques ou distincts , il est préférable

de dresser un tableau à double entrée comme suit

	Résultats du second lancer
Résultats du premier lancer	

Il suffit de dresser le tableau suivant qui présente le produit cartésien E x E où E est l'ensemble des numéros que portent les faces du dé :

	-1	-1	-1	0	1	1
-1	(-1,-1)	(-1,-1)	(-1,-1)	(-1,0)	(-1,1)	(-1,1)
-1	(-1,-1)	(-1,-1)	(-1,-1)	(-1,0)	(-1,1)	(-1,1)
-1	(-1,-1)	(-1,-1)	(-1,-1)	(-1,0)	(-1,1)	(-1,1)
0	(0,-1)	(0,-1)	(0,-1)	(0,0)	(0,1)	(0,1)
1	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,0)	(1,1)	(1,1)
1	(1,-1)	(1,-1)	(1,-1)	(1,0)	(1,1)	(1,1)

Tableau 1

On constate qu'il y a **36 cas possibles** et **9 évènements élémentaires :**

(-1,-1) , (-1,0) , (-1,1) , (0, -1) , (0, 0) , (0, 1) , (1,-1) , (1, 0) et (1, 1).

On donne dans le tableau suivant la probabilité de chacun de ses évènements élémentaires :

e_i	(-1, -1)	(-1,0)	(-1,1)	(0,-1)	(0,0)	(0,1)	(1,-1)	(1,0)	(1,1)
$p(e_i)$	$\frac{9}{36}=\frac{1}{4}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	$\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$	$\frac{2}{36}=\frac{1}{18}$	$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$

1° On considère l'événement suivant :

A : « les deux numéros sont différents »

$$A=\{(-1,0),(-1,1),(0,-1),(0,1),(1,-1),(1,0)\}$$

Donc $p(A)=p((-1,0))+p((-1,1))+p((0,-1))+p((0,1))+p((1,-1))+p((1,0))$

$$=\frac{1}{12}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{1}{18}$$

$$=\frac{11}{18}$$

Remarquons que nous pouvons dénombrer tous les cas favorables

à partir du tableau 1 en les marquant par une étoile :

	-1	-1	-1	0	1	1
-1				★	★	★
-1				★	★	★
-1				★	★	★
0	★	★	★		★	★
1	★	★	★	★		
1	★	★	★	★		

Nous obtenons ainsi :

9 + 9 + 2 + 2 = 22 cas favorables,

Par suite , $p(A) = \frac{22}{36} = \frac{11}{18}$

B :" la somme des deux numéros obtenus est égale à 0".

Dénombrons sur le tableau 1 précèdent tous les cas favorables :

	-1	-1	-1	0	1	1
-1					●	●
-1					●	●
-1					●	●
0				●		
1	●	●	●			
1	●	●	●			

Il existe 6 + 1 + 6 = 13 cas favorables.

Donc

$$p(B) = \frac{13}{36}$$

2° Soit C : « les deux numéros obtenus sont différents

sachant que leur somme est nulle ».

L'évènement C est « l'évènement A sachant que

l'évènement B est réalisé » qu'on note

$$C = A|B$$

La probabilité de C est donnée par la formule

$$p(C) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)}$$

L'évènement $B \cap A$ est : « les deux numéros obtenus sont différents **et** leur somme est nulle ».

	-1	-1	-1	0	1	1
-1				★	★ ●	★ ●
-1				★	★ ●	★ ●
-1				★	★ ●	★ ●
0	★	★	★		★	★
1	★ ●	★ ●	★ ●	★		
1	★ ●	★ ●	★ ●	★		

Donc $Card(B \cap A)$ est le nombre de cases marquées

à la fois par étoile et par disque , $Card(B \cap A) = 12$

Ainsi ,

$$p(C)=\frac{p(B\cap A)}{p(B)}=\frac{\frac{12}{36}}{\frac{13}{36}}=\frac{12}{13}$$

4° Complétons d’abord le tableau 1, en y plaçons pour chaque couple (a, b) la valeur absolue |a + b| :

	-1	-1	-1	0	1	1
-1	2	2	2	1	0	0
-1	2	2	2	1	0	0
-1	2	2	2	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1
1	0	0	0	1	2	2
1	0	0	0	1	2	2

Les valeurs prises par X sont : 0 , 1 et 2.

Card (X=0) = 13 donc $p(X=0)=\dfrac{13}{36}$

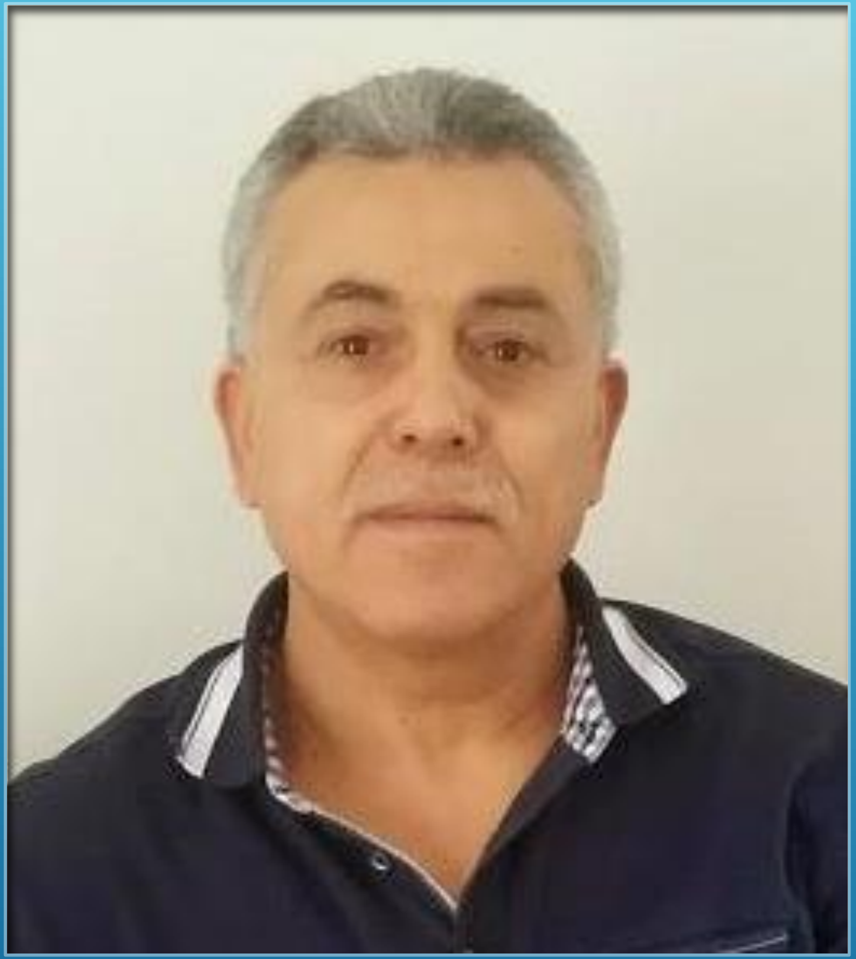
Card (X = 1) = 10 donc $p(X=1)=\dfrac{5}{18}$

Card(X = 2) = 13 donc $p(X=2)=\dfrac{13}{36}$

On vérifie bien que :

$$p(X=0)+p(X=1)+p(X=2)=1$$

MERCI ET À BIENTÔT ,



M. FARID ABIDI