Série N°02 **4^e Maths**

❄ Prof : Abidi Farid ❄

Thème : Parabole

Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 1 ★★★★☆

On donne la droite (D) d'équation $x = -\frac{1}{4}$ et les points $A(4,2)$, $E(0,1)$ et $F(m,0)$ où m est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

1 Déterminer m pour que $AF = \frac{17}{4}$.

Dans la suite , on prend $m = \frac{1}{4}$.

2 Démontrer que A se trouve sur la parabole (P) de foyer F et de directrice (D).

3 Écrire une équation de (P) puis tracer (P).

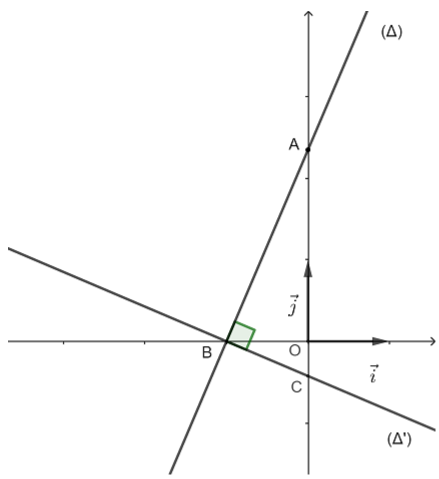
4 Prouver que la droite (AE) est une tangente à (P).

5 La droite (AE) coupe la droite (D) en un point L. Soit (D') la droite passant par L et perpendiculaire à la droite (AL).

Prouver que (D') est la tangente à (P) en un point K dont on déterminera les coordonnées.

Exercice 2 ★★★★☆

Dans l'annexe ci-contre, (Δ) est la droite passant par les points $A(0,a)$, où a est un réel strictement positif, et $B(-1,0)$. La droite (Δ') perpendiculaire à (Δ) en B coupe l'axe des ordonnées en un point C.



1 Vérifier que le point C a pour coordonnées $\left(0, -\frac{1}{a}\right)$.

2 Soit E le point tel que $ABCE$ est un rectangle.

ⓐ Placer le point E puis déterminer ses coordonnées.

ⓑ Montrer que le point E varie sur la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 + ay - a^2 = 0$.

ⓒ Montrer que $(\mathscr{C})$ est une parabole dont on déterminera les coordonnées du foyer F et une équation cartésienne de la directrice (D).

ⓓ Placer F et tracer (D).

3 La tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en E coupe (D) en un point G.

ⓐ Donner une équation de (T) et vérifier que G a pour coordonnées $\left(\dfrac{4-a^2}{8}, \dfrac{5a}{4}\right)$.

ⓑ Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}$.

ⓒ Tracer alors (T) et $(\mathscr{C})$.

Exercice 3 ☆☆☆☆☆

Soit (P) la parabole d'équation $y^2 = 4x$.

1 Déterminer les coordonnées du foyer F et une équation de la directrice (D) de (P). Tracer (P).

2 On considère un réel t strictement positif et les points $M\left(\dfrac{t^2}{4}, t\right)$ et $M'\left(\dfrac{t^2}{16}, -\dfrac{t}{2}\right)$.

ⓐ Vérifier que M et M' sont deux points de (P).

ⓑ Donner les équations des tangentes (T) et (T') à (P), autre que l'axe des abscisses, respectivement aux points M et M'.

3 ⓐ Montrer que (T) et (T') sont sécantes en un point N et préciser les coordonnées du point N.

ⓑ Vérifier alors que N appartient à une branche de parabole (Γ) dont on déterminera une équation.

ⓒ Construire dans le repère la branche de parabole (Γ).

Exercice 4 ☆☆☆☆☆

On considère les points $A(4,4)$ et $B(-1,4)$. Soit (P) la parabole de sommet O, d'axe focal $(O, \overrightarrow{i})$ et passant par A.

1 ⓐ Montrer qu'une équation de (P) est $y^2 = 4x$. Tracer (P).

ⓑ Déterminer les coordonnées du foyer F et écrire une équation de la directrice (D) de (P).

2 Soit J le milieu du segment $[BF]$.

ⓐ Montrer que (AJ) est une tangente à (P).

ⓑ Montrer que (AJ) coupe (D) en $I\left(-1, \dfrac{3}{2}\right)$.

3 Soit Q la parabole d'équation $y = \sqrt{2}\, x^2 + a$ où a est un réel.
Déterminer la valeur exacte de a pour que (P) et (Q) soient tangentes en un point que l'on déterminera.

4 Pour la valeur de a trouvée, calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées et les paraboles (P) et (Q).

Exercice ☆☆☆☆☆

Soit (P) la parabole de foyer O , de directrice la droite (D) d'équation $x = -2$.

1 ⓐ Montrer qu'une équation de (P) est $y^2 = 4x + 4$.

ⓑ Déterminer les coordonnées du sommet S de (P). Tracer (P).

2 Soit $A\left(-2, \dfrac{3}{2}\right)$. On note (T_1) et T_2 les tangentes à (P) issues de A.

ⓐ Déterminer les équations de (T_1) et T_2.

ⓑ Déterminer les coordonnées des points de contacts M_1 et M_2 respectivement des tangentes (T_1) et T_2 avec la parabole (P).

ⓒ Montrer que (T_1) et T_2 sont perpendiculaires et que les points O, M_1 et M_2 sont alignés. Tracer (T_1) et T_2.

3 Soit M un point de (P) d'affixe $z = r\, e^{i\theta}$ où $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

ⓐ Prouver que $\theta \neq 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

ⓑ Montrer que $r = \dfrac{2}{1 - cos\theta}$.

4 Soit M un point de (P) distinct de S. La droite (OM) recoupe (P) en M'.

ⓐ Montrer que $\dfrac{1}{OM} + \dfrac{1}{OM'}$ est indépendant de θ.

ⓑ Déterminer la valeur minimale de MM'.

ⓒ Soit N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe de (P).
Montrer que le produit $MN \times M'N'$ est constant.