Corrigé Série N°02 — 4^e Maths

❄ Prof : Abidi Farid ❄

Thème : Parabole

Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$.

Exercice 1 ★★★★☆

On donne la droite (D) d'équation $x = -\frac{1}{4}$ et les points $A(4,2)$, $E(0,1)$ et $F(m,0)$ où m est un réel de l'intervalle $]0,1[$.

1 $AF = \sqrt{(m-4)^2 + (-2)^2} = \sqrt{m^2 - 8m + 20}$.
$AF = \frac{17}{4} \Longleftrightarrow m^2 - 8m + 20 = \frac{289}{16} \Longleftrightarrow m^2 - 8m + \frac{31}{16} = 0$.
les calculs donnent $m = \frac{1}{4}$ *ou* $m = \frac{31}{4}$. Comme $m \in]0,1[$ alors $m = \frac{1}{4}$.

2 On $A(4,2)$ et $AF = \frac{17}{4}$, $d(A,D) = |x_A + \frac{1}{4}| = \frac{17}{4}$ donc $A \in (P)$.

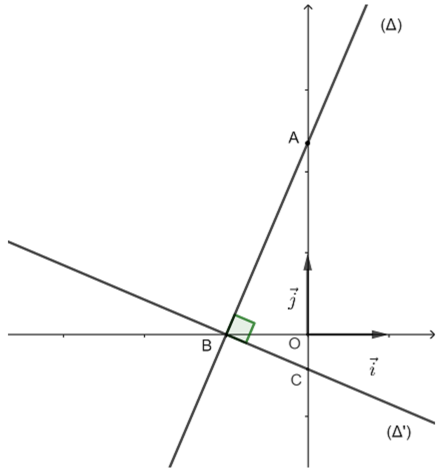
3 (P) est une parabole de foyer $F(\frac{1}{4},0)$ et de directrice $D : x = -\frac{1}{4}$ donc $P : y^2 = 2px$ avec $p = d(F,D) = \frac{1}{2}$. Ainsi, $P : y^2 = x$.

4 Une équation de la tangente (T) à la parabole (P) en A est $2y = \frac{1}{2}(x + 4 \leftrightarrow x - 4y + 4 = 0$. On a $E(0,1)$ et $0 - 4 + 4 = 0$ donc $A \in (T)$ donc $T = (AE)$. Ainsi , (AE) est une tangente à (P).

5 La droite (AE) coupe la droite (D) au point $L\left(-\frac{1}{4}, \frac{15}{16}\right)$.
(D') est perpendiculaire à la droite (AL) donc $D' : 4x + y + c = 0$ où c est réel.
$L \in (D') \Longleftrightarrow c = \frac{1}{16}$ donc $D' : 4x + y + \frac{1}{16} = 0$ d'où $D' : y = -\frac{1}{4}x - \frac{1}{16}$ ou encore $D' : -\frac{1}{8}y = \frac{1}{2}[x + \frac{1}{64})$.
Soit $K(\left(\frac{1}{64}, -\frac{1}{8}\right)$, comme $\left(-\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$ donc $K \in (P)$ et (D') est la tangente à (P) au un point K.

Exercice 2 ★★★★☆

Dans l'annexe ci-contre, (Δ) est la droite passant par les points $A(0,a)$, où a est un réel strictement positif, et $B(-1,0)$. La droite (Δ') perpendiculaire à (Δ) en B coupe l'axe des ordonnées en un point C.



1 $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1\\-a\end{pmatrix}$. $C \in [O, \overrightarrow{j})$ donc $C(0,\alpha)$ où α est un réel. $\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix}1\\ \alpha\end{pmatrix}$. $\overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$ donc $-1-\alpha\, a = 0$ donc $\alpha = -\dfrac{1}{a}$. Ainsi, le point C a pour coordonnées $\left(0, -\dfrac{1}{a}\right)$.

2 ⓐ E le point tel que $ABCE$ est un rectangle donc $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BC}$ donc $\begin{cases} x_E & = 1 \\ y_E - a & = -\dfrac{1}{a} \end{cases}$ Donc $E(1, a - \dfrac{1}{a})$.

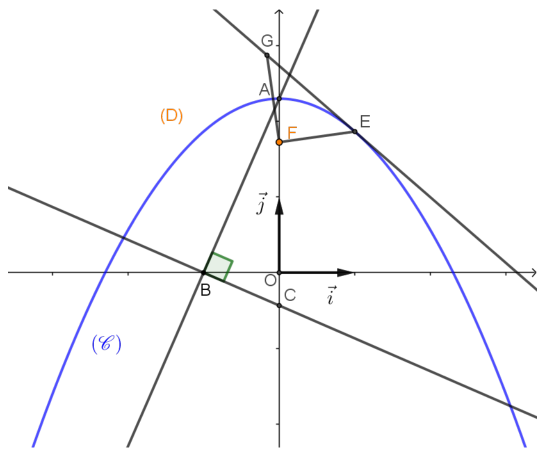
ⓑ On a $E(1, a-\dfrac{1}{a})$ et $1^2 + a(a - \dfrac{1}{a} - a^2 = 1 + a^2 - 1 - a^2 = 0$ donc le point E varie sur la courbe $(\mathscr{C})$ d'équation $x^2 + ay - a^2 = 0$.

ⓒ $\mathscr{C} : x^2 = -a(y-a)$ donc $(\mathscr{C})$ est une parabole de sommet $S(0,a)$ et de paramètre $p = \dfrac{a}{2}$.

On pose : $X = x \;\; et \;\; Y = y + a$.

Éléments	dans $(S, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$	$(O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$
Foyer	$F(0, -\dfrac{a}{4})$	$F\left(O, \dfrac{3a}{4}\right)$
Directrice	$D : Y = \dfrac{a}{4}$	D :y= $\dfrac{5a}{4}$

ⓓ Pour la figure on a pris a=2,4.



3 ⓐ Une équation de la tangente (T) à $(\mathscr{C})$ en E est : $x_E.x = -\dfrac{a}{2}(y - a + y_E - a$ donc $x = -\dfrac{a}{2}(y - a - \dfrac{1}{a}$ ou encore $2x + ay - 1 - a^2 = 0$.

Soit G le point d'intersection de (T) et (D), $y_G = \dfrac{5a}{4}$, et $2x_G + ay_G - 1 - a^2 = 0 \iff 2x_G + \dfrac{a^2}{4} - 1 = 0 \iff x_G = \dfrac{4-a^2}{8}$. Donc $G\left(\dfrac{4-a^2}{8}, \dfrac{5a}{4}\right)$.

ⓑ On a $\overrightarrow{FE}\begin{pmatrix}1\\ \dfrac{a^2-4}{4a}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}\dfrac{a^2-4}{8}\\ -\dfrac{a}{2}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{FE}.\overrightarrow{FG}=\dfrac{a^2-4}{8}-\dfrac{a^2-4}{8}=0$.

ⓒ Voir figue ci-dessus.

Exercice 3 ☆☆☆☆☆

Soit (P) la parabole d'équation $y^2=4x$.

1 Déterminer les coordonnées du foyer F et une équation de la directrice (D) de (P). Tracer (P).

2 On considère un réel t strictement positif et les points $M\left(\dfrac{t^2}{4},t\right)$ et $M'\left(\dfrac{t^2}{16},-\dfrac{t}{2}\right)$.

ⓐ Vérifier que M et M' sont deux points de (P).

ⓑ Donner les équations des tangentes (T) et (T') à (P), autre que l'axe des abscisses, respectivement aux points M et M'.

3 ⓐ Montrer que (T) et (T') sont sécantes en un point N et préciser les coordonnées du point N.

ⓑ Vérifier alors que N appartient à une branche de parabole (Γ) dont on déterminera une équation.

ⓒ Construire dans le repère la branche de parabole (Γ).

Exercice 4 ☆☆☆☆☆

On considère les points $A(4,4)$ et $B(-1,4)$. Soit (P) la parabole de sommet O, d'axe focal $(O,\overrightarrow{i})$ et passant par A.

1 ⓐ Montrer qu'une équation de (P) est $y^2=4x$. Tracer (P).

ⓑ Déterminer les coordonnées du foyer F et écrire une équation de la directrice (D) de (P).

2 Soit J le milieu du segment $[BF]$.

ⓐ Montrer que (AJ) est une tangente à (P).

ⓑ Montrer que (AJ) coupe (D) en $I\left(-1,\dfrac{3}{2}\right)$.

3 Soit Q la parabole d'équation $y=\sqrt{2}\,x^2+a$ où a est un réel.
Déterminer la valeur exacte de a pour que (P) et (Q) soient tangentes en un point que l'on déterminera.

4 Pour la valeur de a trouvée, calculer l'aire de la partie du plan limitée par l'axe des ordonnées et les paraboles (P) et (Q).

Exercice 5 ☆☆☆☆☆

Soit (P) la parabole de foyer O , de directrice la droite (D) d'équation $x=-2$.

1 ⓐ Montrer qu'une équation de (P) est $y^2 = 4x + 4$.

ⓑ Déterminer les coordonnées du sommet S de (P). Tracer (P).

2 Soit $A\left(-2, \frac{3}{2}\right)$. On note (T_1) et T_2 les tangentes à (P) issues de A.

ⓐ Déterminer les équations de (T_1) et T_2.

ⓑ Déterminer les coordonnées des points de contacts M_1 et M_2 respectivement des tangentes (T_1) et T_2 avec la parabole (P).

ⓒ Montrer que (T_1) et T_2 sont perpendiculaires et que les points O, M_1 et M_2 sont alignés. Tracer (T_1) et T_2.

3 Soit M un point de (P) d'affixe $z = r\, e^{i\theta}$ où $r \in]0, +\infty[$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

ⓐ Prouver que $\theta \neq 2k\pi, \ k \in \mathbb{Z}$.

ⓑ Montrer que $r = \frac{2}{1 - cos\theta}$.

4 Soit M un point de (P) distinct de S. La droite (OM) recoupe (P) en M'.

ⓐ Montrer que $\frac{1}{OM} + \frac{1}{OM'}$ est indépendant de θ.

ⓑ Déterminer la valeur minimale de MM'.

ⓒ Soit N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe de (P). Montrer que le produit $MN \times M'N'$ est constant.