Série N°**01** **4^e** Maths

❄ Prof : Abidi Farid ❄

Thème : Parabole

Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1 ★★★★☆

On considère la droite D d'équation $x = -4$ et la parabole (P) de foyer O et de directrice (D).

1 ⓐ Montrer qu'une équation de (P) est $y^2 = 8x + 16$.

ⓑ Donner le sommet S de (P) et tracer (P).

2 Soit $A(6, 8)$ un point de la parabole (P).

ⓐ Écrire une équation de la tangente (T_A) en A à (P).

ⓑ La droite (OA) recoupe (P) au point B. Déterminer les coordonnées de B et écrire une équation de la tangente (T_B) en B à (P).

ⓒ Vérifier que (T_A) et (T_B) sont perpendiculaires et qu'elles se coupent en un point I situé sur la directrice (D).

3 Soit $M(x_0, y_0)$ un point de (P) distinct de S. On désigne par N le projeté orthogonal de M sur la tangente en S à (P). La perpendiculaire menée de N à la droite (MS) coupe l'axe des abscisses en I.

Montrer que l'abscisse de I est indépendant de x_0 et y_0.

Exercice 2 ★★★★☆

On considère les deux paraboles (P) et (P') d'équations respectives $y^2 = 2x$ et $x^2 = 16y$.

1 Soit A le point de (P) d'ordonnée a, donner une équation de la tangente (T_a) à (P) au point A.

2 Soit B le point de (P') d'abscisse b, donner une équation de la tangente (T_b) à (P') au point B.

3 Montrer que $T_a \mathbin{//} T_b$ si et seulement si $ab = 8$.

4 Montrer que $T_a = (AB)$ si et seulement si $b + \dfrac{a^2}{2} - \dfrac{ab^2}{16} = 0$.

5 En déduire que les deux paraboles (P) et (P') admettent une unique tangente commune (T) dont on donnera une équation.

Exercice 3 ★★★★☆

Soit la courbe (C) d'équation $3y^2 + 4y + 2x - 1 = 0$.

1 ⓐ Montrer que (C) est une parabole dont on donnera le sommet S, le foyer F et la directrice (D).

ⓑ Construire (C).

2 Soit M_0 le point de (C) d'abscisse -3 et d'ordonnée y_0 positive.

ⓐ Déterminer une équation de la tangente (T) à (C) au point M_0.

ⓑ Donner une équation de la perpendiculaire (N) à (T) en M_0.

3 (T) coupe l'axe focal (Δ) de (C) au point I et (N) coupe (Δ) au point J.

ⓐ Montrer que F est le milieu du segment $[IJ]$.

ⓑ Soit K le projeté orthogonal de M_0 sur (Δ), montrer que $JK = \frac{1}{3}$.

Exercice 4 ★★★★★

Soit (P) la parabole de foyer O et de directrice la droite (D) d'équation $x = -2$.

1 ⓐ Montrer qu'une équation de (P) est $y^2 = 4x + 4$.

ⓑ Déterminer le sommet S de (P) et tracer la parabole (P).

2 Soit M un point de (P) distinct de S d'affixe $z = r\, e^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in]-\pi, \pi]$.

ⓐ Montrer que $\theta \neq 0$.

ⓑ Montrer que $r = \dfrac{2}{1 - cos\theta}$.

3 On suppose que M est distinct de S, la droite (OM) recoupe (P) en M'.

ⓐ Déterminer la valeur minimale de la distance MM'.

ⓑ Soit N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe des abscisses. Montrer que la valeur du produit $MN \times M'N'$ est une constante que l'on précisera.