Série N°01 4^e Maths

❄ Prof : Abidi Farid ❄

Thème : Parabole

Le plan est supposé rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1 ★★★★☆

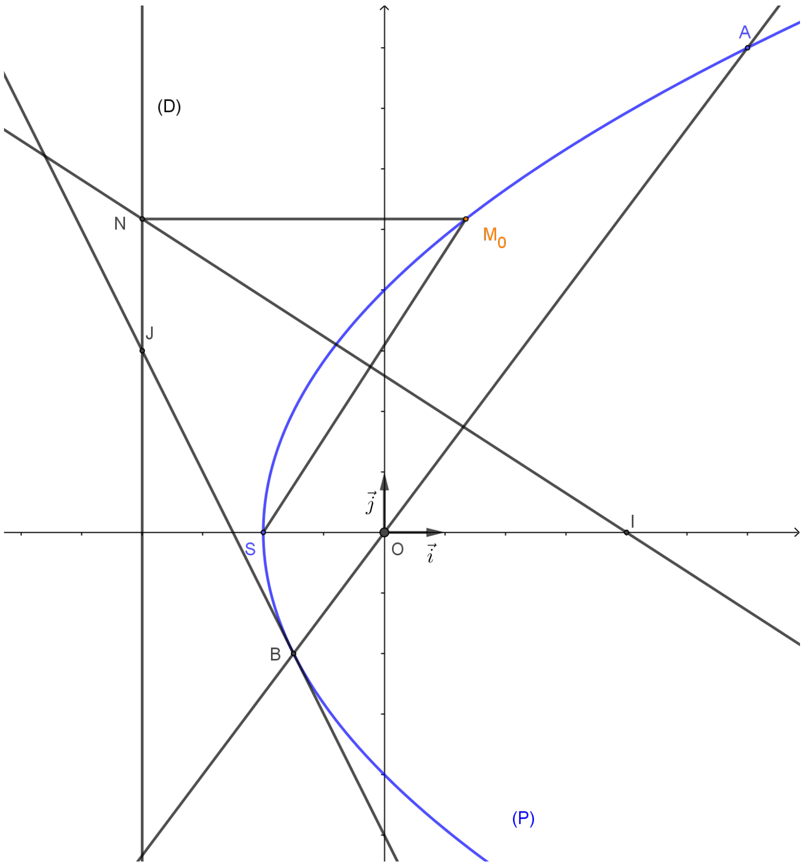
On considère la droite D d'équation $x = -4$ et la parabole (P) de foyer O et de directrice (D).

1 ⓐ $M(x,y) \in (P) \Longleftrightarrow$MF=d(M,D)$\Longleftrightarrow$x$^2 + y^2 = (|x+4|)^2 \Longleftrightarrow$y$^2 = (x+4)^2 - x^2$

$\Longleftrightarrow$y$^2 = 8x + 16$.

Donc une équation de (P) est $y^2 = 8x + 16$.

ⓑ Le sommet de (P) est $S(-2,0)$.



2 Soit $A(6,8)$ un point de la parabole (P).

ⓐ Une équation de la tangente (T_A) en A à (P) est :

$8y = 4\Big((x+2)+(6+2)\Big) \Longleftrightarrow y = \frac{1}{2}x + 5.$

ⓑ La droite (OA) est d'équation $-4x+3y=0$. (OA) recoupe (P) au point B donc $\begin{cases} x &= \frac{3}{4}y \\ y^2 &= 8x+16 \end{cases}$. D'où $y^2=6y+16 \Longleftrightarrow$ y=-2 ou y=8. $Ainsi$,B$\left(-\frac{3}{2},-2\right)$.

Une équation de la tangente T_B au point B à (P) est :

$-2y=4\Big((x+2)+(-\frac{3}{2}+2)\Big) \Longleftrightarrow y=-2x-5.$

ⓒ $(-2).\frac{1}{2}=-1$ donc (T_A) et (T_B) sont perpendiculaires. L'abscisse du point d'intersection J de (T_A) et (T_B) est solution de l'équation $\frac{1}{2}x+5=-2x-5$ d'où $x=-4$. Ainsi , J est un point de la directrice (D).

3 Soit $M(x_0,y_0)$ un point de (P) distinct de S. La tangente à (P) en S a pour équation $x=-2$. Le projeté orthogonal de M sur la tangente en S à (P) est $N(-2,y_0$. $\overrightarrow{SM}\begin{pmatrix} x_0+2 \\ y_0 \end{pmatrix}$ donc la perpendiculaire (Δ) menée de N à la droite (MS) est d'équation $-2(x_0+2)x+y_0y+c=0$, où c est un réel. Comme $N(-2,y_0)$ est un point de (Δ) alors $-2(x_0+2)+y_0^2+c=0 \Longleftrightarrow$c=-6x$_0-12$ donc Δ : $(x_0+2)x+y_0y-6x_0-12=0$. (Δ) coupe l'axe des abscisses en I donc l'abscisse de I vérifie $(x_0+2)x_I-6x_0-12=0 \Longleftrightarrow$x$_I=6$.

Exercice 2 ☆☆☆☆☆

On considère les deux paraboles (P) et (P') d'équations respectives $y^2=2x$ et $x^2=16y$.

1 Soit A le point de (P) d'ordonnée a, donc $a^2=2x_A$ donc $x_A=\frac{1}{2}a^2$ d'où $A\left(\frac{1}{2}a^2,a\right)$. Une équation de la tangente (T_a) à (P) au point A est : $ay=x+\frac{a^2}{2}$ soit $5_a: x-ay+\frac{a^2}{2}=0$.

2 Soit B le point de (P') d'abscisse b, donc $b^2=16y_B$ donc $y_B=\frac{b^2}{16}$ d'où $B\left(b,\frac{b^2}{16}\right)$. Une équation de la tangente (T_b) à (P') au point B est $bx=8(y+\frac{b^2}{16}$ soit $T_b: bx-8y-\frac{b^2}{2}$.

3 $\overrightarrow{u_a}\begin{pmatrix} a \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (T_a). $\overrightarrow{u_b}\begin{pmatrix} 8 \\ b \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (T_b).

$T_a\ //\ T_b \Longleftrightarrow$ ab-8=0$\Longleftrightarrow$ab=8.T$_a=(AB) \Longleftrightarrow$ B$\in(T-a) \Longleftrightarrow$b+$\frac{a^2}{2}-\frac{ab^2}{16}=0$.

5 $(T_a)//(T_b)$ et $T_a=(AB) \Longleftrightarrow ab=8$ et $b+\frac{a^2}{2}-\frac{ab^2}{16}=0 \Longleftrightarrow b=\frac{8}{a}$ et $a^3=-8$ $\Longleftrightarrow a=-2$ et $b=-4$. Donc $A(2,-2)$ et $B(-4,1)$ d'où (AB) est une tangente commune aux paraboles (P) et (P') et (AB) d'équation $x+2y+2=0$.

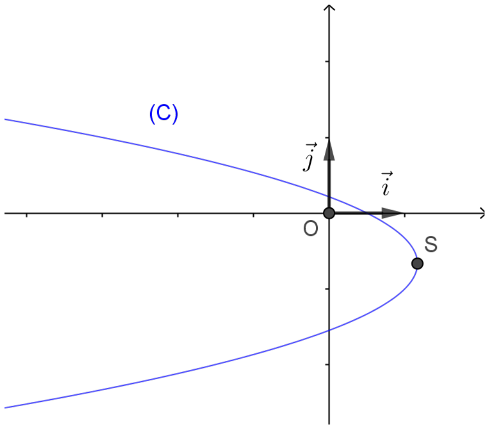
Exercice 3 ☆☆☆☆☆

Soit la courbe (C) d'équation $3y^2+4y+2x-1=0$.

1 ⓐ $3y^2+4y+2x-1=0 \iff 3\left[(y+\frac{2}{3})^2-\frac{4}{9}\right]+2x-1=0 \iff (y+\frac{2}{3})^2 = -\frac{2}{3}(x-\frac{7}{6})$. On pose $\begin{cases} X &= x-\frac{7}{6} \\ Y &= y+\frac{2}{3} \end{cases}$ et $S\left(\frac{7}{6},-\frac{2}{3}\right)$.

$(C): y^2 = -\frac{2}{3}X$ dans le repère $(S, \vec{i}, \vec{j})$ donc (C) est une parabole de sommet S et de paramètre $p=\frac{1}{3}$.

Éléments	dans $(S, \vec{i}, \vec{j})$	$(O, \vec{i}, \vec{j})$
Foyer	$F(-\frac{1}{6},0)$	F(1,-$\frac{2}{3}$)
Directrice	$D: X=\frac{1}{6}$	D :x= $\frac{4}{3}$

ⓑ 

2 ⓐ $M_0(-3,y_0)\in(C)$ *et* $y_0\geq 0 \iff 3y_0^2+4y_0-7=0$ *et* $y_0 \geq 0 \iff y_0=1$ donc $M_0(-3,1)$. Une équation de la tangente (T) à (C) au point M_0 est : $\frac{5}{3}(y+\frac{2}{3}) = -\frac{1}{3}\left((x-\frac{16}{3}\right) \iff x+5y-2=0$.

ⓑ (N) est la perpendiculaire à (T) en M_0 donc une équation de (N) est $-5x+y+c=0$ où c est un réel. Comme M_0 appartient à (N) alors $c=-16$ d'où $N: 5x-y+16=0$.

3 ⓐ $(\Delta): y=-\frac{2}{3}$ est l'axe focal de (C).

(T) coupe (Δ) de (C) au point $I\left(\frac{16}{3},-\frac{2}{3}\right)$.

(N) coupe (Δ) au point $J\left(-\frac{10}{3},-\frac{2}{3}\right.$.

$\frac{x_I+x_J}{2}=1$ et $\frac{y_I+y_J}{2}=-\frac{2}{3}$ donc F est le milieu du segment $[IJ]$.

ⓑ K le projeté orthogonal de M_0 sur (Δ) donc $K(-3,-\frac{2}{3}$ d'où $JK=|x_K-x_J|=\frac{1}{3}$.

Exercice 4 ☆☆☆☆☆

Soit (P) la parabole de foyer O et de directrice la droite (D) d'équation $x=-2$.

1 ⓐ $M(x,y)\in(P) \iff$MF=d(M,D)$\iff$x$^2+y^2=(|x+2|)^2 \iff$y$^2=(x+2)^2-x^2$

$\iff$y$^2=4x+4$.

Donc une équation de (P) est $y^2=4x+4$.

(b) Le sommet de P est $S(-1,0)$. (Voit figure ci-dessous)

2 Soit M un point de (P) distinct de S d'affixe $z = r\,e^{i\theta}$ où $r > 0$ et $\theta \in]0,\pi[$.

$M(x,y) \in (P) \Longleftrightarrow y^2 = 4x + 4 \Longleftrightarrow x^2 + y^2 = (x+1)^2 \Longleftrightarrow r^2 = (r\,cos\theta\ + 1)^2$.

Or $x \geq -1$ donc $r\,cos\theta\ + 1 \geq 1$.

Par suite , $r = r\,cos\theta\ + 1 \Longleftrightarrow r(1 - cos\theta) = 2 \Longleftrightarrow r = \dfrac{2}{1 - cos\theta}$.

3 On suppose que M est distinct de S, la droite (OM) recoupe (P) en M'.

(a) soit $z = r\,e^{i\theta}$ l'affixe de M , $z' = r'\,e^{i(\theta+\pi)}$ où $r' = OM'$, on a : $OM = r = \dfrac{2}{1 - cos\theta}$ et

$OM' = r' = \dfrac{2}{1 - cos(\theta + \pi)} = \dfrac{2}{1 + cos\theta}$.

Comme $O \in [MM']$, alors $MM' = OM + OM' = \dfrac{2}{1 - cos\theta} + \dfrac{2}{1 + cos\theta} = \dfrac{4}{sin^2\theta}$.

MM' est minimale lorsque $sin\,\theta$ est maximale donc $\theta = \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Soit N et N' les projetés orthogonaux respectifs de M et M' sur l'axe des abscisses.

$MN = |r\,sin\theta| = r\,sin\theta$ et $M'N' = |r'\,sin(\theta + \pi)| = r'\,sin\theta$.

Donc $MN \times M'N' = r\,sin\theta \times r'\,sin\theta = \dfrac{4sin^2\theta}{sin^2\theta} = 4$.