L.KAYRIDINE JANOURA	**SIMILITUDES& COMPLEXES**	
MR : AMMAR BOUAJILA		
GSM :92 741 567	$4^{éme}$ **MATHS**	**SERIE N°6**

Exercice n°1 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC isocèle et rectangle en A tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par I,J,K et L les milieux respectifs de [AB],[BC],[AC] et [JC].

1) Faire une figure.

2) Soit f la similitude directe de centre J, qui envoie A sur K.

a) Déterminer l'angle et le rapport de f puis justifier que f(K)= L.

b) Soit H le milieu du segment [AJ]. Justifier que f(I)=H.

3) On munit le plan du repère orthonormé direct $\left(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$.Soit φ l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\overline{z} + \frac{1+i}{2}$.

a) Montrer que φ est une similitude indirecte de centre C.

b) Donner les affixes des points I,K,J et H.

c) Déterminer φ(I) et φ(J).

d) Déduire alors que $\varphi = f\circ s_{(IK)}$, (où $s_{(IK)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (IK)).

4) a) Soit Δ l'axe de la similitude indirecte φ. Tracer Δ.

b) La droite Δ coupe les droites (IK) et (HL) respectivement en P et Q.

Montrer que φ(P)=f(P) et en déduire que φ(P)=Q

Exercice n°2 :

Soit un triangle rectangle ABC tels que AB=2AC et $\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$. Soit I le milieu de [AB].

1) Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Soit Ω le centre de S. Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2) Soient (Γ) et (Γ') les cercles de diamètres respectifs [AC] et [AB].

a) Montrer que S(Γ) = (Γ').

b) La droite (IC) recoupe (Γ) en un point E. On pose F=S(E).

Montrer que les points A,E et F sont alignés, puis construire F.

3) Soit f la similitude indirecte qui transforme Ω en A et A en B.

a) Déterminer le rapport de f et montrer que f((BC))=(AC).

b) Vérifier que fof est une homothétie et en déduire que f((AC))=(BC).

c) Déterminer alors le centre de f et construire son axe (Δ).

4) On suppose que AC=1.On muni le plan complexe du repère orthonormé $\left(A, \overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}\right)$.

a) Donner l'écriture complexe de S et déduire que l'affixe de Ω est $z_\Omega = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$.

b) Déterminer l'écriture complexe de f.

c) Déduire qu'une équation cartésienne de (Δ) est : $(1+\sqrt{5})x + 2y - 2 = 0$

Exercice n°3 :

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $\left(o, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par : $z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$.

1) Montrer que f est une similitude directe dont on déterminera le rapport k, l'angle θ et le centre A.

2) Soit M un point du plan d'affixe z≠2 et M' son image par f. Notons z' l'affixe de M'.

a) Montrer que $\frac{z'-z}{z'-2}$ est imaginaire pur. En déduire la nature du triangle AMM'.

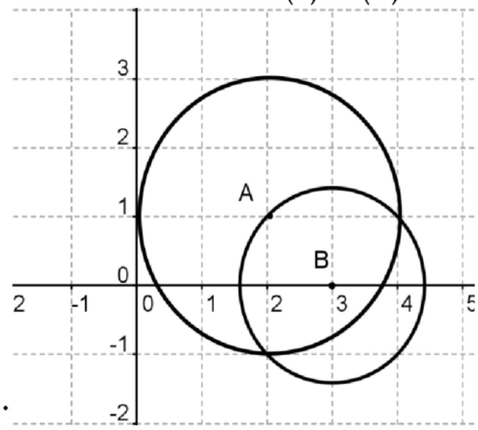
b) Soit I le milieu de [MA]. Montrer que le triangle IMM' est équilatéral direct.

c) Déduire alors une construction simple du point M' connaissant M .

Exercice n°4 :

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(o,\vec{u},\vec{v})$, on donne deux cercles (Γ) et (Γ') de centres respectifs A(2+i) et B(3) et de rayons respectifs 2 et $\sqrt{2}$

Soit S la similitude directe d'angle $\frac{\pi}{4}$ qui transforme (Γ) en (Γ').



1) Donner la forme complexe de S.
2) En déduire l'affixe du centre I de cette similitude.
3) Déterminer l'affixe du point O' = S(O).
4) Soit M un point variable sur (Γ).
   Expliquer comment peut-on construire son image M' par S ?
5) Soit S' la similitude indirecte de centre I qui transforme (Γ) en (Γ').
   a) Donner la forme complexe de S'.
   b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (Δ) l'axe de S'.

Exercice n°5 :

ABC est un triangle équilatéral direct centre O. Soit A' et *C '* les milieux respectifs de [BC] et[AB].
On désigne par I le symétrique de O par rapport à *C '*

1) Montrer que te triangle OAI est équilatéral direct.
2) Soit f la similitude directe telle que f(I) = O et f(C) = B
   a) Déterminer le rapport et l'angle de S
   b) Montrer que le centre Ω de f est un point commun des cercles circonscrits aux triangles OAI et OBC . Construire Ω
   c) Montrer que f((AI)) = (OA) et déterminer f((AC)). En déduire que f(A) = A'
3) Soit R la rotation de centre O et telle que R(A) = C et h l'homothétie de centre B et de rapport $\frac{1}{2}$
   Montrer que f = h o R
4) Soit g la similitude indirecte telle que g(I) = O et g(C) = B , On note J son centre.
   a) Déterminer le rapport de g.
   b) Calculer $(gof^{-1})(O)$ et $(gof^{-1})(B)$, caractériser gof^{-1}
   c) Montrer que g(B) = A' et que J est te barycentre de (C, 1) et (A' , -4)
   d) Montrer que l'axe Δ de g est la perpendiculaire à (BC) en J .

Exercice n°6 :

Dans le plan orienté dans le sens direct, On considère un rectangle ABCD de centre O tel que $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2}(2\pi)$ et AB=2AD=8. Soit I le milieu de [AB].

1) Montrer qu'il existe un seul antidéplacement f qui envoie A en B et I en C.
2) Montrer que f est une symétrie glissante et donner sa forme réduite.
3) Soit g la similitude indirecte telle que g(A)=I et g(I)=C.
   a) Montrer que le rapport de g est égal à $\sqrt{2}$.
   b) Soit Ω le centre de g. Montrer que $\Omega = S_A(C)$.
   c) Déterminer et construire l'axe (Δ) de g.
4) Soit C'=g(C). Montrer que $C' = S_I(\Omega)$, puis construire C'.
5) La droite (Δ) coupe [AI],[IC] et [CC'] respectivement en M,N et P. Prouver que g(M)=N et g(N)=P.
6) Soit φ la similitude directe telle que φ(B)=I et φ(I)=D.
   a) Déterminer le rapport et l'angle de φ.
   b) Montrer que C est le centre de φ.