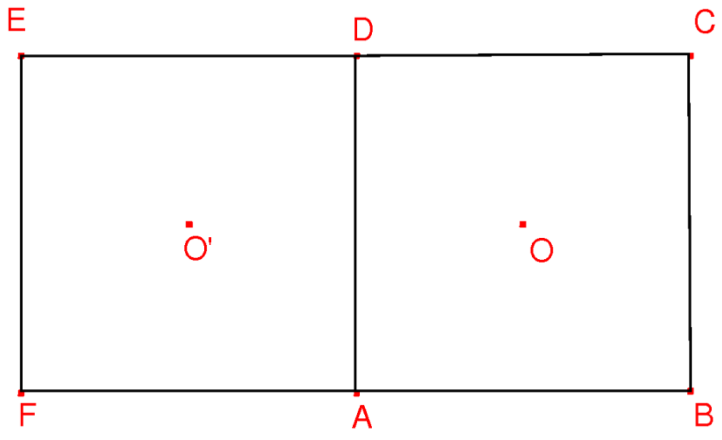
L.KAYRIDINE JANOURA	SIMILITUDES&CORRECTION	
MR : AMMAR BOUAJILA		
GSM :92 741 567	$4^{éme}$ MATHS	SERIE N°4

EXERCICE 1

On donne les deux carrés directs ABCD et ADEF **voir figure ci-dessous** de centres respectifs O et O'.

1. a. Montrer qu'il existe un unique déplacement R qui envoie B sur D et C sur E.
   b. Montrer que R est une rotation dont on précisera le centre et l'angle. Déterminer R(D).
   c. Soit P un point variable sur le segment [BC]. La perpendiculaire à la droite (AP) en A coupe la droite (DE) en M. Montrer que R(P) = M.
2. Caractériser l'antidéplacement h qui envoie B sur D et C sur E.
3. On désigne par J le milieu du segment [AD]. Soit S la similitude directe qui envoie O sur J et C sur D.
   a. Montrer que S est de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.
   b. Montrer que A est le centre de S.
   c. Montrer que S(B) = O. En déduire S(D).
4. Soit I le milieu du segment [PM]
   Déterminer l'ensemble des points I lorsque P varie sur le segment [BC].
5. Soit g la similitude indirecte de centre B et qui transforme C en F.
   a. Déterminer le rapport et l'axe de g. Prouver que g(O) =D.
   b. On pose $f = Sog$.
   Montrer que f est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.
   Soit Ω le centre de f et Δ sont axe.
   c. Déterminer $fof(B)$, construire alors Ω puis Δ



EXERCICE 2

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle et isocèle en A tel que $(\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[BC]$

1. Soit f la similitude directe qui envoie B en J et C en A.
   a. Déterminer le rapport et l'angle de f.
   b. Déterminer $f((AC))$ et $f((AB))$. En déduire $f(A)$.
   c. On désigne par Ω le projeté orthogonal de A sur la droite (IC). Montrer que Ω est le centre de f.
2. Soit g la similitude indirecte de centre Ω qui envoie A en I.
   a. Déterminer le rapport de g.
   b. Montrer que l'ensemble des points M du plan tels que : $f(M) = g(M)$ est une droite que l'on précisera.

EXERCICE 3

On considère dans le plan orienté un triangle ABC tel que AC = 4, AB = 2 et $(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

On désigne par Ω le projeté orthogonal de A sur (BC).

1. Soit f la similitude directe qui transforme A en C et B en A.
   a. Déterminer l'angle et le rapport de f.
   b. Montrer que Ω est le centre de f.
   c. On désigne par E le symétrique de Ω par rapport à la droite (AB) et par F le symétrique de Ω par rapport à la droite (AC). Montrer que $A = E * F$ et que $f(E) = F$.
2. Soit g la similitude indirecte qui transforme E en Ω et Ω en F.
   a. Déterminer le rapport de g. On note ω le centre de g.
   b. Déterminer gog(E) .En déduire que ω appartient à la droite (EF).

3.a. Déterminer $g \circ f^{-1}(\Omega)$ et $g \circ f^{-1}(F)$ puis montrer que $g \circ f^{-1} = S_{(AC)}$

b. Déterminer alors g(A) et g(B).En déduire que ω appartient à la droite (BC).

c. Construire alors ω et l'axe Δ de g

4. On rapporte le plan au repère orthonormé direct $(A,\vec{i},\vec{j})$ tel que $\vec{i} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AC}$ et $\vec{j} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
   a. Préciser l'affixe de chacun des points A, B et C.
   b. Soit M un point d'affixe z et M' d'affixe z'. Montrer que : f(M) = M' $\Leftrightarrow$ z' = 2iz + 4
   En utilisant la question (3.a) déduire que : g(M) = M' $\Leftrightarrow$ $z' = -2i\bar{z} + 4$
   c. Déterminer l'affixe de chacun des points Ω, ω ainsi q'une équation de la doite Δ .

EXERCICE 4

Le plan P est rapporté a un repère orthonormé direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$$

1. Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre Ω , le rapport et l'angle.
2. Soit M_0 le point d'affixe $z_0 = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i$. Donner la forme trigonométrique de $z_0 - z_\Omega$.
3. On considère la suite de points $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie pour tout entier naturel n par $M_{n+1} = f(M_n)$.
   On note z_n l'affixe du point M_n.
   a. Placer les points Ω, M_0, M_1, M_2, M_3 et M_4.
   b. Montrer que pour tout entier naturel n, l'égalité : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$.
   c. Déterminer le plus petit entier n tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.
4. a. On considère l'équation (E) : 7x – 12y = 1 où x et y sont deux entiers relatifs. Résoudre l'équation (E).
   b. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tels que M_n appartienne à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$. Préciser son plus petit élément.

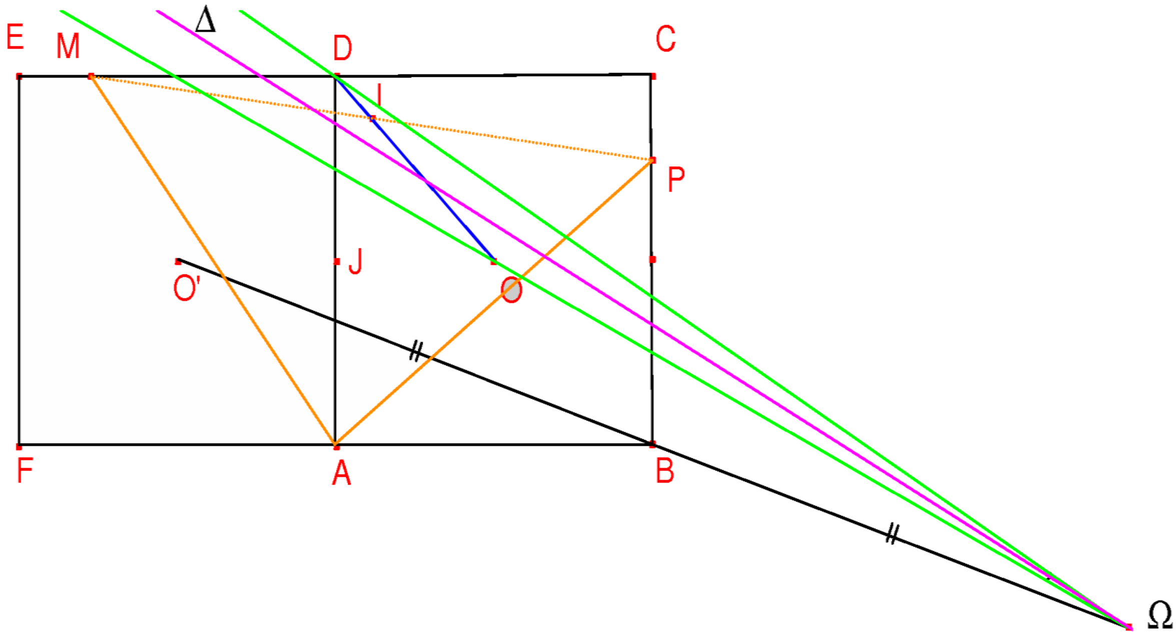
EXERCICE 5

Soit ABCD est un carré tel que $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ et AB = 2.On désigne par I le centre du carré ABCD et par J le milieu du segment [CD]. Soit f la similitude directe qui transforme A en I et B en J.

1. a. Déterminer le rapport et l'angle de la similitude f.
   b. Construire le centre Ω de f.
   c. Déterminer S((BC)). En déduire le point image par f du point C, puis le point K image par f du point I.
   d. Montrer que les points A, Ω et K sont alignés.
2. On désigne par g la similitude indirecte qui transforme J en A et I en B.
   a. Déterminer le rapport de g.
   b. Montrer que fog est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.
3. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(A\,;\vec{u},\vec{v})$ tel que $\vec{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$,
   a. Donner l'écriture complexe de chacune des similitudes f et g.
   b. Préciser l'affixe du point Ω.
   c. Préciser le centre et l'axe de g.

VERS CORRECTION

CORRECTION D'EXERCICE 1



1. a. ABCD et ADEF sont deux carrés $\Rightarrow$ BC = AD = DE $\neq 0$ alors il existe un unique déplacement R qui envoie B sur D et C sur E.

b. R est d'angle $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{DE}})[2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BA}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \neq 2k\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

alors R est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre $\omega \in med[BD] \cap med[CE] = (AC) \cap (AD) = \{A\}$

donc $R = r_{(A,\frac{\pi}{2})}$

$$\left.\begin{array}{l}(\widehat{\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AF}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AD = AF\end{array}\right\} \text{ alors } R(D) = F$$

c. R((AP)) est la perpendiculaire à (AP) passant par R(A) = A alors f((AP)) = (AM)

R(B) = D et R(C) = E alors R((BC)) = (DE)

$P \in (AP) \cap (BC) \Rightarrow R(P) \in R((AP)) \cap f((BC)) \Rightarrow R(P) \in (AM) \cap (DE) = \{M\} \Rightarrow R(P) = M$

2. Les droites (DB) et (CE) ne sont pas parallèles alors h n'est pas une symétrie orthogonale et vue que h est un antidéplacement donc h est une symétrie glissante de vecteur $\vec{U}$ et d'axe Δ_1

$h(B) = D \Rightarrow O = D * B \in \Delta_1$; $h(C) = E \Rightarrow D = C * E \in \Delta_1 \Rightarrow \Delta_1 = (OD)$

$h(B) = D \Leftrightarrow t_{\vec{u}} o S_{(OD)}(B) = D \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(B) = D \Leftrightarrow \vec{u} = \overrightarrow{BD} = 2\overrightarrow{OD}$, donc $h = t_{2\overrightarrow{OD}} o S_{(OD)} = S_{(OD)} o t_{2\overrightarrow{OD}}$.

3. a. Si on désigne par k le rapport de S et θ son angle

S(O) = J et S(C) = E alors $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{OC},\overrightarrow{JD}})[2\pi] \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. (ABCD est un carré direct)

Et $k = \frac{OC}{JD} = \frac{\frac{AC}{2}}{\frac{AD}{2}} = \frac{AC}{AD} = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

b. $O = A * C \Rightarrow S(O) = S(A) * S(C) \Rightarrow J = S(A) * D$ or $J = A * D \Rightarrow S(A) = A$

donc A est le centre de S.

c. ABCD est un carré direct de centre O alors ABO est un triangle rectangle isocèle en O et de sens direct

alors $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$. $\cos(\frac{\pi}{4}) = \cos(\widehat{BAO}) = \frac{AB}{AO} \Leftrightarrow AB = \frac{\sqrt{2}}{2}AO$

$$\left.\begin{array}{l}(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AO}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ AB = \frac{\sqrt{2}}{2}AO\end{array}\right\} \text{ alors } S(B) = O$$

$O = B * D \Rightarrow S(O) = S(B) * S(D) \Rightarrow J = O * S(D)$ or $J = O * O' \Rightarrow S(D) = J$

En effet OD= OA = $\frac{BD}{2} = \frac{FD}{2} = O'D = O'A \Rightarrow$ AODO' losange $\Rightarrow O * O' = A * D = J$.

4. $R(P) = M$ $\quad \left\{\begin{array}{l}(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AM}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \\ AP = AM\end{array}\right.$ alors AMP est un triangle isocèle ractagle en A(de sens direct)

Or $I = P * M \Rightarrow (AI) = med[PM] \Rightarrow (AI)$ porte la bissectrice intérieure de $\widehat{MAP} \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$

Dans triangle API rectangle en I, on a $\cos(\widehat{PAI}) = \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{AI}{AP} \Leftrightarrow AI = \frac{\sqrt{2}}{2}AP$

$$\left.\begin{array}{l}(\widehat{\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AI}}) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi] \\ AI = \frac{\sqrt{2}}{2}AP\end{array}\right\} \text{ alors } S(P) = I \text{ et vue que P décrit le segment [BC] alors I décrit le segment S([BC])=[DO]}$$

Donc l'ensemble des points I le segment [DO].

5. a. Si on désigne par k' le rapport de g alors $k' = \frac{BF}{BC} = \frac{2AB}{BC} = 2$

$g(c) = F \Rightarrow$ l'axe Δ' de g porte la bissectrice intérieure de $\widehat{CBF} \Rightarrow$

l'axe Δ' de g porte la bissectrice intérieure de $\widehat{CBA} \Rightarrow \Delta' = (BO)$ car ABC est isocèle en B et $O = A * C$

On pose $g(O) = L$. $O \in \Delta' \Rightarrow \overrightarrow{BL} = 2\overrightarrow{BO} = \overrightarrow{BD} \Rightarrow L = B \Rightarrow g(O) = D$.

b. g est une similitude indirecte comme composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte

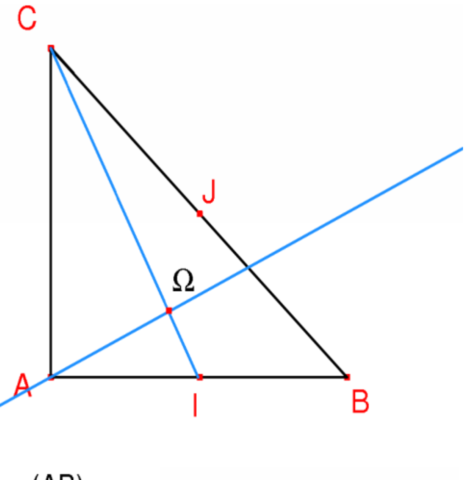
de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2} \times 2 = \sqrt{2}$

c. $fof(B) = SogoSog(B) = SogoS(B) = Sog(O) = S(D) = O'$.

$fof(B) = O' \Leftrightarrow h_{(\Omega,2)}(B) = O' \Leftrightarrow \overrightarrow{\Omega O'} = 2\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow \Omega = S_B(O')$ d'ou la construction de Ω.

$f(B) = O \Rightarrow \Delta$ porte la bissectrice intérieure de $\widehat{B\Omega O}$ d'ou la construction de Δ.

CORRECTION D'EXERCICE 2



1. Si on désigne par k le rapport de f et θ son angle

a. f(B) = J et f(C) = A alors $k = \frac{AJ}{CB} = \frac{AJ}{2BJ} = \frac{AJ}{2AJ} = \frac{1}{2}$.

ABC est rectangle en A et $J = B * C \Rightarrow JA = JB = JC$

$\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{JA}})[2\pi] \Rightarrow \theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JA}})[2\pi] \Rightarrow \theta \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$,

ABC est isocèle direct et $J = B * C \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{JC},\overrightarrow{JA}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b. f((AC)) est la perpendiculaire à (AC) passant par f(C) = A alors f((AC)) = (AB)

f((AB)) est la perpendiculaire à (AB) passant par f(B) =J alors f((AB)) = (IJ). (Prouver ce résultat)

$A \in (AB) \cap (AC) \Rightarrow f(A) \in f((AB)) \cap f((AC)) \Rightarrow f(A) \in (IJ) \cap (AB) = \{I\} \Rightarrow f(A) = I$.

2. $\Omega \in (A\Omega) \cap (IC) \Rightarrow f(\Omega) \in f((A\Omega)) \cap f((IC)) \Rightarrow f(\Omega) \in (IC) \cap (A\Omega) = \{\Omega\} \Rightarrow f(\Omega) = \Omega$.

le rapport de f est différent de 1 alors Ω est le centre de f.

3. $f(M) = g(M) \Leftrightarrow g^{-1}of(M) = M \Leftrightarrow M$ est un point invariant par $g^{-1}of$.

$g^{-1}of$ est une similitude indirecte comme composée d'une similitude indirecte et d'une similitude directe

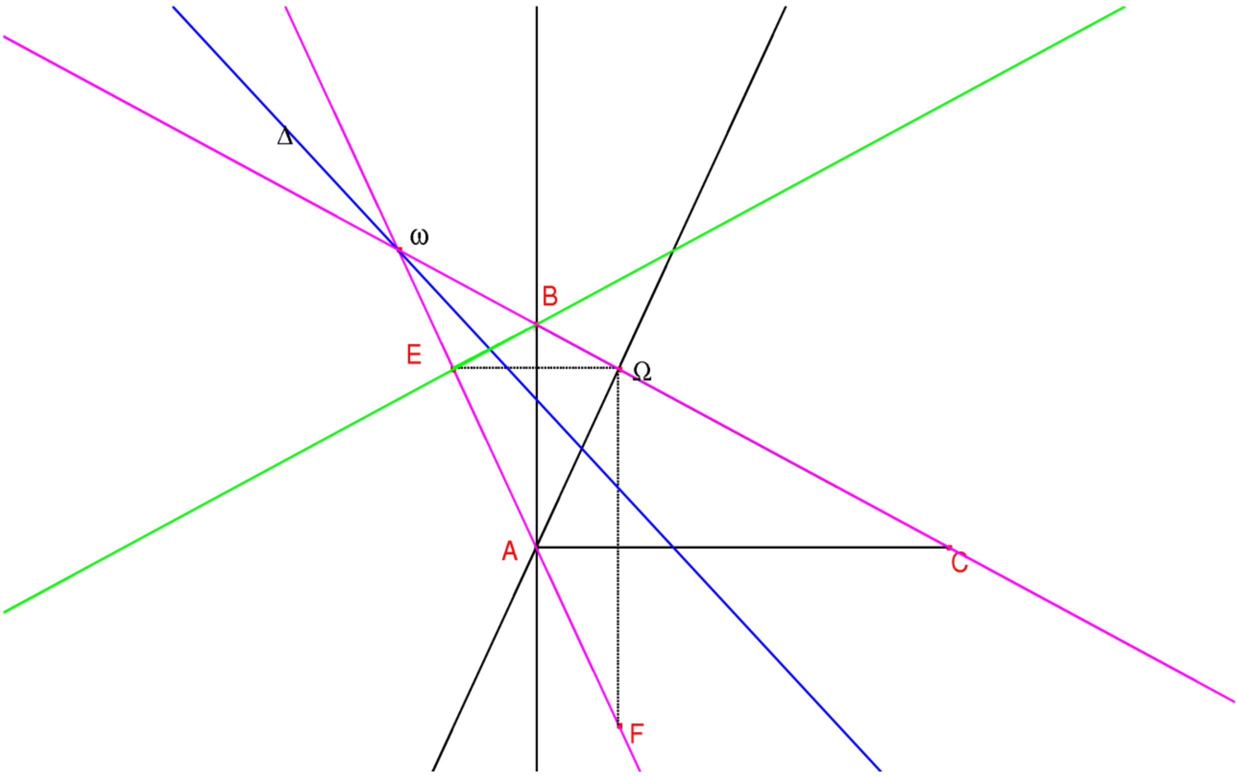
de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1$ alors $g^{-1}of$ est un antidéplacement qui fixe les points A et Ω

$(g^{-1}of(A) = g^{-1}(I) = A$ et $g^{-1}of(\Omega) = g^{-1}(\Omega) = \Omega)$

ainsi $g^{-1}of = S_{(A\Omega)}$. Soit $E = \{M \in P \text{ tq } f(M) = g(M)\}$

$M \in E \Leftrightarrow f(M) = g(M) \Leftrightarrow g^{-1}of(M) = M \Leftrightarrow S_{(A\Omega)}(M) = M \Leftrightarrow M \in (A\Omega)$. Donc $E = (A\Omega)$.

CORRECTION D'EXERCICE 3



1. Si on désigne par k le rapport de f et θ son angle

a. $f(A) = C$ et $f(B) = A$ alors $k = \frac{AC}{AB} = \frac{4}{2} = 2$ et $\theta \equiv (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{BA}})[2\pi] \equiv \pi + (\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AB}})[2\pi] \equiv \pi - \frac{\pi}{2}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$.

b. Soit D le centre de f . $fof(B) = f(A) = f(B) = A \Rightarrow h_{(D,-4)}(B) = C \Rightarrow D \in (BC)$

$f(A) = C \Rightarrow (\widehat{\overrightarrow{DA},\overrightarrow{DC}}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \Rightarrow (DA) \perp (DC)$ or $D \in (BC) \Rightarrow (DA) \perp (BC)$ en D

alors D est le projeté orthogonale de A sur (BC) donc $D = \Omega$.

c. $E = S_{(AB)}(\Omega)$ et $F = S_{(AC)}(\Omega) \Leftrightarrow \Omega = S_{(AC)}(F)$ alors $E = S_{(AB)}(S_{(AC)}(F)) = S_{(AB)} o S_{(AC)}(F) = S_A(F)$

$E = S_A(F) \Leftrightarrow A = E * F$

$* \ E = S_{(AB)}(\Omega) \Rightarrow (AB) = med[\Omega E] \Rightarrow AE = A\Omega$.

Dans le triangle ΩEF on a $A = E * F$ et $A\Omega = AE = AF \Rightarrow \Omega EF$ est rectangle en $\Omega \Rightarrow (\Omega E) \perp (\Omega F)$

$(\Omega A) \perp (\Omega B) \Rightarrow S_{(AB)}((\Omega A)) \perp S_{(AB)}((\Omega B)) \Rightarrow (EA) \perp (EB)$

$E \in (EB) \cap (E\Omega) \Rightarrow f(E) \in f((EB)) \cap f((E\Omega)) \Rightarrow f(E) \in (EA) \cap (\Omega F) = \{F\} \Rightarrow f(E) = F$

f((EB)) est la perpendiculaire à (EB) passant par f(B) = A alors f((EB)) = (EA)

f((E Ω)) est la perpendiculaire à (E Ω) passant par f(Ω) = Ω alors f((E Ω)) = (Ω F).

2. a. Si on désigne par k' le rapport de g. $g(E) = \Omega$ et $g(\Omega) = F$ alors $k' = \frac{\Omega F}{\Omega E} = 2$ car $f(E) = F$.

b. $gog(E) = g(\Omega) = F$. $gog = h_{(\omega,4)} \Rightarrow h_{(\omega,4)}(E) = F \Rightarrow \omega \in (EF)$.

3. a. $g \circ f^{-1}(\Omega) = g(\Omega) = F$; $g \circ f^{-1}(F) = g(E) = \Omega$.

$F = S_{(AC)}(\Omega)$ et $\Omega = S_{(AC)}(F)$ $g \circ f^{-1}$ est une similitude indirecte comme composée d'une similitude indirec et similitude directe. $g \circ f^{-1}$ et $S_{(AC)}$ sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts F et Ω donc coïncident partout c'est-à-dire $g \circ f^{-1} = S_{(AC)}$.

b. $g(A) = g \circ f^{-1}(C) = S_{(AC)}(C) = C$; $g(B) = g \circ f^{-1}(A) = S_{(AC)}(A) = A$.

$gog(B) = g(A) = C \Rightarrow h_{(\omega,4)}(B) = C \Rightarrow \omega \in (BC)$.

c. $\omega \in (EF)$ et $\omega \in (BC) \Rightarrow \omega \in (EF) \cap (BC)$ d'où la construction.

$g(A) = C$ alors Δ porte la bissectrice intérieure de $\widehat{A\omega C}$.

4. a. $z_A = 0$, $z_B = 2i$ et $z_C = 4$.

b. $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = az + b$.

$f(A) = C \Leftrightarrow z_C = az_A + b \Leftrightarrow b = 4$; $f(B) = A \Leftrightarrow z_A = az_B + b \Leftrightarrow 2ia + 4 = 0 \Leftrightarrow a = \frac{-4}{2i} = 2i$.

donc $f(M) = M' \Leftrightarrow z' = 2iz + 4$

$g(M) = M' \Leftrightarrow S_{(AC)} of(M) = M' \Leftrightarrow z_{M'} = \overline{z_{f(M)}} \Leftrightarrow z_{M'} = \overline{2iz + 4} = -2i\bar{z} + 4$ ($(AC) = (A,\vec{i})$)

c. $f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z_\Omega = 2i\, z_\Omega + 4 \Leftrightarrow z_\Omega = \frac{4}{1-2i} = \frac{4}{5} + i\frac{8}{5}$.

$z_\omega = \frac{-2i.4+4}{1-4} = -\frac{4}{3} + i\frac{8}{3}$

$\Delta = \{ M \text{ tq } \overrightarrow{\omega M'} = 2\,\overrightarrow{\omega M} \text{ où } M' = f(M) \}$

$M(z) \in \Delta$ ssi $\overrightarrow{\omega M'} = 2\,\overrightarrow{\omega M}$ et $M' = f(M)$ (on pose $z = x + iy$ $x,y \in \mathbb{R}$)

ssi $-2i\bar{z} + 4 + \frac{4}{3} - i\frac{8}{3} = 2(z + \frac{4}{3} - i\frac{8}{3})$ ssi $-2ix - 2y + 4 + \frac{4}{3} - i\frac{8}{3} = 2(x + iy + \frac{4}{3} - i\frac{8}{3})$

ssi $-2y + \frac{16}{3} + i(-2x - \frac{8}{3}) = 2x + \frac{8}{3} + i(2y - \frac{16}{3})$ ssi $\begin{cases} -2y + \frac{16}{3} = 2x + \frac{8}{3} \\ -2x - \frac{8}{3} = 2y - \frac{16}{3} \end{cases}$ ssi $x + y - \frac{4}{3} = 0$

donc Δ à pour équation : $3x + 3y - 4 = 0$

CORRECTION D'EXERCICE 4

$z' = -\left(\sqrt{3}+i\right)z - 1 + i\left(1+\sqrt{3}\right)$ $\quad \sqrt{3}+i \neq 1$ alors $f = S_d(\Omega(i), 2, \frac{7\pi}{6})$

2. $z_0 - z_\Omega = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{3}{4}i - i = \frac{\sqrt{3}}{4} - \frac{1}{4}i = \frac{1}{2}(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i\sin(-\frac{\pi}{6}))$

3. a.

b. Soit la propriété P : $z_n - i = 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i)$;

. Pour $n = 0$, $2^0 e^{i0}(z_0 - i) = z_0 - i$ alors P est vraie

. Supposons que P est vraie jusqu'à l'ordre k et montrons qu'elle est vraie à l'ordre k+1.

$z_k - i = 2^k e^{i\frac{7k\pi}{6}}(z_0 - i)$

$M_{k+1} = f(M_k)$ alors $z_{k+1} - z_\Omega = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}(z_k - z_\Omega) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}}(z_k - i) = 2e^{i\frac{7\pi}{6}} 2^k e^{i\frac{7k\pi}{6}}(z_0 - i) = 2^{k+1} e^{i\frac{7(k+1)\pi}{6}}(z_0 - i)$.

c. $\Omega M_n = \left| 2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}(z_0 - i) \right| = 2^n \left| e^{i\frac{7n\pi}{6}} \right| \Omega M_0 = 2^n \frac{1}{2} = 2^{n-1}$.

$\Omega M_n \geq 10^2 \Leftrightarrow 2^{n-1} \geq 100 \Leftrightarrow n\ln(2) \geq \ln(50) \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(50)}{\ln 2} \simeq 5{,}64$. n =6 le plus petit entier tel que $\Omega M_n \geq 10^2$.

4. $7(-5) - 12(-3) = 1$;

$\begin{cases} 7x - 12y = 1 \\ 7(-5) - 12(-3) = 1 \end{cases} \Rightarrow 7(x+5) - 12(y+3) = 0 \Leftrightarrow 7(x+5) = 12(y+3) \Rightarrow \begin{cases} 7 \mid 12(y+3) \\ 7 \wedge 12 = 1 \end{cases} \Rightarrow 7 \mid (y+3) \Rightarrow \begin{cases} x+5 = 12k \\ y+3 = 7k \end{cases}$

faites la réciproque et conclure que $S_{\mathbb{Z}x\mathbb{Z}} = \{(-5+12k, -3+7k)\ k \in \mathbb{Z}\}$

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ $M_n \neq \Omega$

M_n appartient à la demi-droite d'origine Ω dirigée par le vecteur $\vec{u}$ ssi $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_n}\right) \equiv 0[2\pi] = 2\pi k$

$\Leftrightarrow \left(\vec{u}, \overrightarrow{\Omega M_0}\right) + \left(\overrightarrow{\Omega M_0}, \overrightarrow{\Omega M_n}\right) = 2\pi k \Leftrightarrow \arg(z_0 - i) + \arg\left(\frac{z_n - i}{z_0 - i}\right) = 2k\pi \Leftrightarrow \arg(z_0 - i) + \arg\left(2^n e^{i\frac{7n\pi}{6}}\right) = 2k\pi$

$\Leftrightarrow \frac{7n\pi}{6} - \frac{\pi}{6} = 2k\pi \Leftrightarrow 7n - 12k = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} n = -5 + 12p \\ k = -3 + 7p \ , p \in \mathbb{Z} \\ n \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow n \in \{-5 + 12p \ , p \in \mathbb{N}^*\}$

le plus petit élément est n = 7. (p = 1)