1. Propriété du pgcd et ppcm :

EXERCICE 1

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

"Il existe un seul couple $(a\,;b)$ de nombres entiers naturels, tel que :
$a < b \quad ; \quad PPCM(a\,;\,b) - PGCD(a\,;\,b) = 1$"

EXERCICE 2

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie.

"On considère l'équation :
$(E): \ x^2 - 52x + 480 = 0$
où x est un entier naturel.
Il existe deux entiers naturels non nuls dont le $PGCD$ et le $PPCM$ sont solutions de l'équation (E)."

2. Petit théorème de Fermat :

EXERCICE 3

Le but de l'exercice est d'étudier certaines propriétés de divisibilité de l'entier $4^n - 1$, lorsque n est un entier naturel.

On rappelle la propriété connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "*Si p est un nombre entier premier et a un entier naturel premier avec p, alors $a^{p-1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$*"

Partie A. Quelques exemples.

1. Démontrer que, pour tout entier naturel n, 4^n est congru à 1 modulo 3.
2. Prouver à l'aide du petit théorème de Fermat, que $4^{28} - 1$ est divisible par 29.
3. Pour $1 \leqslant n \leqslant 4$, déterminer le reste de la division de 4^n par 17. En déduire que, pour tout entier k, le nombre $4^{4k} - 1$ est divisible par 17.
4. Pour quels entiers naturels n le nombre $4^n - 1$ est-il divisible par 5 ?
5. A l'aide des questions précédentes, déterminer quatre diviseurs premiers de $4^{28} - 1$.

Partie B. Divisibilité par un nombre premier

Soit p un nombre premier différent de 2.

1. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 1$ tel que :
   $4^n \equiv 1 \pmod{p}$.
2. Soit $n \geqslant 1$ un entier naturel tel que $4^n \equiv 1 \pmod{p}$. On note b le plus petit entier strictement positif tel que $4^b \equiv 1 \pmod{p}$ et r le reste de la division euclidienne de n par b :
   a. Démontrer que $4^r \equiv 1 \pmod{p}$. En déduire que $r = 0$.
   b. Prouver l'équivalence : $4^n - 1$ est divisible par p si, et seulement si, n est multiple de b.
   c. En déduire que b divise $p - 1$.

EXERCICE 4

1. On considère l'équation (E) :
   $$109x - 226y = 1$$
   où x et y sont des entiers relatifs.
   a. Déterminer le $pgcd$ de 109 et 226. Que peut-on en conclure pour l'équation (E) ?
   b. Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble des couples de la forme $(141 + 226k\,;68 + 109k)$, où k appartient à $\mathbb{Z}$.
   En déduire qu'il existe un unique entier naturel non nul d inférieur ou égal à 226 et un unique entier naturel non nul e tels que $109d = 1 + 226e$.
   (On précisera les valeurs des entiers d et e)
2. Démontrer que 227 est un nombre premier.
3. On note A l'ensemble des 227 entiers naturels a tels que $a \leqslant 226$.
   On considère les deux fonctions f et g de A dans A définies de la manière suivante :
   - à tout entier de A, f associe le reste de la division euclidienne de a^{109} par 227 ;
   - à tout entier de A, g associe le reste de la division euclidienne de a^{141} par 227.

   a. Vérifier que $g\big[f(0)\big] = 0$.
   On rappelle le résultat suivant appelé petit théorème de Fermat :
   Si p est un nombre premier et a un entier non

divisible par p alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

b. Montrer que, quel que soit l'entier non nul a de A, $a^{226} \equiv 1 \pmod{227}$.

c. En utilisant 1. b. , en déduire que, quel que soit l'entier non nul a de A $g[f(a)] = a$.
Que peut-on dire de $f[g(a)] = a$?

EXERCICE 5

1. On considère l'ensemble $A_7 = \{1\,;2\,;3\,;4\,;5\,;6\}$
   a. Pour tout élément de A_7 écrire dans le tableau figurant en annexe l'unique élément y de A_7 tel que $ay \equiv 1 \pmod{7}$.
   b. Pour x entier relatif, démontrer que l'équation $3x \equiv 5 \pmod{7}$ équivaut à $x \equiv 4 \pmod{7}$.
   c. Pour x entier relatif, montrer que les seuls entiers relatifs x solutions de l'équation $ax \equiv 0 \pmod{7}$ sont les multiples de 7.
2. Dans toute cette question, p est un nombre premier supérieur ou égal à 3. On considère l'ensemble $A_p = \{1\,;2\,;\ldots\,;p-1\}$ des entiers naturels non nuls et strictement inférieurs à p. Soit a un élément de A_p.
   a. Vérifier que a^{p-2} est une solution de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.
   b. On note r le reste dans la division euclidienne de a^{p-2} par p. Démontrer que r est l'unique solution x dans A_p, de l'équation $ax \equiv 1 \pmod{p}$.
   c. Soient x et y deux entiers relatifs. Démontrer que $xy \equiv 0 \pmod{p}$ si, et seulement, si x est un multiple de p où y est un multiple de p.
   d. Application : $p = 31$. Résoudre dans A_{31} les équations :
      $2x \equiv 1 \pmod{31}$ et $3x \equiv 1 \pmod{31}$. A l'aide des résultats précédents, résoudre dans $\mathbb{Z}$ l'équation $6x^2 - 5x + 1 \equiv 0 \pmod{31}$

EXERCICE 6

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : "*soit p un nombre premier et a un entier naturel premier avec p ; alors $a^{p-1} - 1$ est divisible par p*".

1. Soit p un nombre premier impair.
   a. Montrer qu'il existe une entier naturel k, non nul, tel que :
      $2^k \equiv 1 \pmod{p}$.
   b. Soit k un entier naturel non nul tel que $2^k \equiv 1 \pmod{p}$ et soit n un entier naturel. Montrer que, si k divise n, alors :
      $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.
   c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
      Montrer, en utilisant la division euclidienne de n par b, que :
      si $2^n \equiv 1 \pmod{p}$ alors b divise n.
2. Soit q un nombre premier impair et le nombre $A = 2^q - 1$. On prend pour p un facteur premier de A.
   a. Justifier que :
      $2^q \equiv 1 \pmod{p}$
   b. Montrer que p est impair.
   c. Soit b tel que $2^b \equiv 1 \pmod{p}$, b étant le plus petit entier non nul vérifiant cette propriété.
      Montrer, en utilisant 1., que b divise q. En déduire que $b = q$.
   d. Montrer que q divise $p - 1$, puis montrer que $p \equiv 1 \pmod{2q}$.
3. Soit $A_1 = 2^{17} - 1$. Voici la liste des nombres premiers inférieurs à 400 et qui sont de la forme $34m + 1$, avec m entier non nul : 103, 137, 239, 307. En déduire que A_1 est premier.

EXERCICE 7

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on pose :
$A(n) = n^4 + 1$

L'objet de l'exercice est l'étude des diviseurs premiers de $A(n)$.

1. Quelques résultats :
   a. Etudier la partié de l'entier $A(11)$.
   b. Montrer que, quel que soit l'entier n, $A(n)$ n'est pas un multiple de 3.
   c. Montrer que tout entier d diviseur de $A(n)$ est premier avec n.
   d. Montrer que, pour tout entier d diviseur de $A(n)$:
      $n^8 \equiv 1 \pmod{d}$
2. Recherche de critères :
   Soit d un diviseur de $A(n)$. On note s le plus petit des entiers naturels non nuls k tels que :
   $n^k \equiv 1 \pmod{d}$
   a. Soit k un tel entier. En utilisant la division euclidienne de k par s, montrer que s divise k.
   b. En déduire que s est un diviseur de 8.
   c. Montrer que si, de plus, d est premier, alors s est un diviseur de $d - 1$. On pourra utiliser le petit théorème de Fermat.
3. Recherche des diviseurs premier de $A(n)$ dans le cas où n est un entier pair.
   Soit p un diviseur premier de $A(n)$. En examinant successivement les cas :
   $s = 1$; $s = 2$; $s = 4$
   conclure que p est congru à 1 modulo 8.
4. *Dans cette question toute trace de recherche, même incomplète, sera en compte dans l'évaluation.*

   Appliquer ce qui précède à la recherche des diviseurs premiers de $A(12)$.

   Indication : la liste des nombres premiers congrus à 1 modulo 8 débute par 17, 41, 73, 89, 97, 113, 137....

EXERCICE 8

On rappelle la propriété, connue sous le nom de petit théorème de Fermat : *Si p est un nombre premier et a est un entier naturel non divisible par p, alors $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.*

On considère la suite (u_n) d'entiers naturels définie par :
$u_0 = 1$; $u_{n+1} = 10 \cdot u_n + 21$ pour tout entier naturel n

1. Calculer u_1, u_2 et u_3.

2. a. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n :
$3{\cdot}u_n = 10^{n+1} - 7$

   b. En déduire, pour tout entier naturel n, l'écriture décimale de u_n.

3. Montrer que u_2 est un nombre premier.

On se propose maintenant d'étudier la divisibilité des termes de la suite (u_n) par certains nombres premiers.

4. Démontrer que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible ni par 2, ni par 3, ni par 5.

5. a. Démontrer que, pour tout entier naturel n :
$3{\cdot}u_n \equiv 4 - (-1)^n \pmod{11}$

   b. En déduire que, pour tout entier naturel n, u_n n'est pas divisible par 11.

6. a. Démontrer l'égalité : $10^6 \equiv 1 \pmod{7}$.

   b. En déduire que, pour tout entier naturel k, $u_{16\cdot k+8}$ est divisible par 17.

3. PPCM :

EXERCICE 9

Dans tout l'exercice x et y désignent des entiers naturels non nuls vérifiant $x < y$. S est l'ensemble des couples $(x\,;y)$ tels que $PGCD\,(x\,;y) = y - x$

1. a. Calculer le $PGCD(363\,;\,484)$.

   b. Le couple $(363\,;484)$ appartient-il à S ?

2. Soit n un entier naturel non nul ; le couple $(n\,;n+1)$ appartient-il à S
Justifier votre réponse.

3. a. Montrer que $(x\,;y)$ appartient à S si, et seulement si, il existe un entier naturel k non nul tel que :
$x = k{\cdot}(y-x) \quad ; \quad y = (k+1)(y-x)$

   b. En déduire que pour tout couple $(x\,;y)$ de S, on a :
$PPCM\,(x\,;y) = k{\cdot}(k+1){\cdot}(y-x)$

4. a. Déterminer l'ensemble des entiers naturels diviseurs de 228.

   b. En déduire l'ensemble des couples $(x\,;y)$ de S tels que :
$PPCM(x\,;\,y) = 228$

EXERCICE 11

1. Soient a et b des entiers naturels non nuls tels que :
$PGCD(a+b\,;\,a{\cdot}b) = p$
où p est un nombre premier.

   a. Démontrer que p divise a^2.
(On remarquera que $a^2 = a(a+b) - a{\cdot}b$)

   b. En déduire que p divise a.
On constate donc, de même, que p divise b.

   c. Démontrer que $PGCD(a\,;\,b) = p$.

2. On désigne par a et b des entiers naturels tels que $a \leqslant b$.

   a. Résoudre le système :
$\begin{cases} PGCD(a\,;\,b) = 5 \\ PPCM(a\,;\,b) = 170 \end{cases}$

   b. En déduire les solutions du système :
$\begin{cases} PGCD(a+b\,;\,a{\cdot}b) = 5 \\ PPCM(a\,;\,b) = 170 \end{cases}$

4. Arithmétique et complexe :

EXERCICE 10

Pour chaque question, une seule des quatre réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Chaque réponse exacte rapporte 1 point. Chaque réponse fausse enlève 0,5 point. Une absence de réponse est comptée 0 point. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro. Aucune justification n'est demandée.

1. On considère dans l'ensemble des entiers relatifs l'équation :
$x^2 - x + 4 \equiv 0 \pmod{6}$

   A : toutes les solutions sont des entiers pairs

   B : il n'y a aucune solution.

   C : les solutions vérifient $x \equiv 2 \pmod{6}$.

   D : les solutions vérifient :
   $x \equiv 2 \pmod{6}$ ou $x \equiv 5 \pmod{6}$

2. On se propose de résoudre l'équation (E) : $24x+34y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

   A : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
   $(x\,;y) = \big(34k - 7\,;5 - 24k\big)$, $k \in \mathbb{Z}$.

   B : L'équation (E) n'a aucune solution.

   C : Les solutions de (E) sont toutes de la forme :
   $(x\,;y) = \big(17k - 7\,;5 - 12k\big)$, $k \in \mathbb{Z}$

   D : Les solutions de (E) sont toutes de la forme
   $(x\,;y) = \big(-7k\,;5k\big)$, $k \in \mathbb{Z}$.

3. On considère les deux nombres $n = 1789$ et $p = 1789^{2005}$. On a alors :

   A : $n \equiv 4 \pmod{17}$ et $p \equiv 0 \pmod{17}$

   B : p est un nombre premier

   C : $p \equiv 4 \pmod{17}$

   D : $p \equiv 1 \pmod{17}$

4. On considère, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal, les points A et Bd 'affixes respectives a et b. Le triangle MAB est rectangle isocèle direct d'hy-

poténuse $[AB]$ si, et seulement si, le point M d'affixe z est tel que :

$A\ : z = \dfrac{b - ia}{1 - i}$ $\qquad B\ : z - a = e^{i\frac{\pi}{4}}(b - a)$

$C\ : a - z = i(b - z)$ $\qquad D\ : b - z = \dfrac{\pi}{2}(a - z)$

5. On considère dans le plan orienté deux points distincts A et B ; on note I le milieu du segment $[AB]$. Soit f la similitude directe de centre A, de rapport 2 et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$; soit g la similitude directe de centre A, de rapport $\dfrac{1}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$; soit h la symétrie centrale de centre I.

$A\ : h \circ g \circ f$ transforme A en b et c'est une rotation.

$B\ : h \circ g \circ f$ est la réflection ayant pour axe la médiatrice du segment $[AB]$

$C\ : h \circ g \circ f$ n'est pas une similitude.

$D\ : h \circ g \circ f$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$

EXERCICE 12

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O ; \vec{u} ; \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique $4\,cm$. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives a, b, c et d telles que :

$a = 1 \quad ; \quad b = 1 + 2i \quad ; \quad c = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}} \quad ; \quad d = 3 + 2i$

On considère la similitude directe s qui transforme A en b et C en D. Soit M un point d'affixe z et M', d'affixe z', son image par s.

1. Exprimer z' en fonction de z.
   Déterminer les éléments caractéristiques de s.

Soit (U_n) la suite numérique définie par :
$$\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = 2U_n + 1 \end{cases} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

2. Montrer que, pour tout entier naturel n, U_{n+1} et U_n sont premiers entre eux.
3. Interpréter géométriquement, en utilisant la similitude s, les termes de la suite (U_n).
4. Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 2^n - 1$.
5. Montrer que, pour tous entiers naturels n et p non nuls tels que $n \geqslant p$:
   $$U_n = U_p\left(U_{n-p} + 1\right) + U_{n-p}$$
   La notation $pgcd(a ; b)$ est utilisée, dans la suite, pour désigner le plus grand diviseur commun à deux entiers naturels a et b. Montrer pour $n \geqslant p$ l'égalité :
   $$\text{pgcd}\left(U_n ; U_p\right) = \text{pgcd}\left(U_p ; U_{n-p}\right)$$
6. Soit n et p deux entiers naturels non nuls, montrer que :
   $$\text{pgcd}\left(U_n ; U_p\right) = U_{\text{pgcd}(n\,;\,p)}$$
   Déterminer le nombre : $\text{pgcd}\left(U_{2005} ; U_{15}\right)$