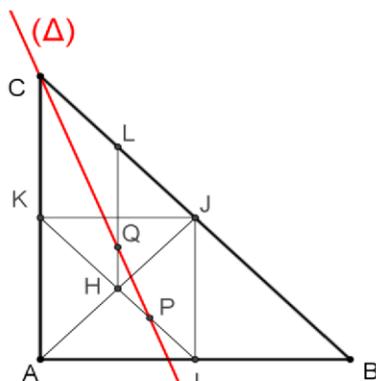


**Correction de la série similitudes
et nombres complexes**

Exercice 1 :

1)



2) f la similitude directe de centre J tq f(A)=K .

ABC rectangle et isocèle en A

$$\begin{aligned} I &= A * B \\ K &= A * C \\ J &= B * C \end{aligned}$$

} ⇒ AIJK est un carré

Le rapport de f : $\frac{JK}{JA} = \frac{JK}{\sqrt{2}JK} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Autrement :

le triangle AJK est rectangle en K

$$\frac{JK}{JA} = \frac{\text{côté opposé à } \widehat{KAJ}}{\text{hypoténuse}} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

L'angle de f : $(\widehat{JA, JK}) \equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi]$

Montrons que f(K)=L

CKJ rectangle et isocèle en K
L=C * J } ⇒ KLJ est rectangle et isocèle en L } ⇒

$$\left. \begin{aligned} \frac{JL}{JK} &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow JL = \frac{\sqrt{2}}{2} JK \\ (\widehat{JK, JL}) &\equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(K) = L$$

2)b) H le milieu du segment [AJ].

$$\left. \begin{aligned} \frac{JH}{JI} &= \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow JH = \frac{\sqrt{2}}{2} JI \\ (\widehat{JI, JH}) &\equiv -\frac{\pi}{4} [2\pi] \end{aligned} \right\} \Rightarrow f(I) = H$$

3) (A, AB, AC) repère orthonormé direct.

$$\varphi : M(z) \mapsto M'(z') \text{ tq } z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{z} + \frac{1+i}{2}$$

3)a) $\varphi : M(z) \mapsto M'(z') \text{ tq } z' = a\bar{z} + b$ où
 $|a| = \left| -\left(\frac{1+i}{2}\right) \right| = \frac{\sqrt{2}}{2} \neq 1 \Rightarrow \varphi$ est une similitude

indirecte de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

L'affixe du point C est i pour Z=i

$$z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{i} + \frac{1+i}{2} = \left(\frac{1+i}{2}\right)i + \frac{1+i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

Signifie que $\varphi(C)=C \Leftrightarrow C$ est le centre de φ

3)b) l'affixe du point I est $\frac{1}{2}$

l'affixe du point K est $\frac{1}{2}i$

l'affixe du point J est $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

l'affixe du point H est $\frac{1}{4} + \frac{1}{4}i$

3) c) $\varphi(I) = ?$ pour $z=z_I = \frac{1}{2}$

$$z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right)\bar{\frac{1}{2}} + \frac{1+i}{2} = -\left(\frac{1+i}{4}\right) + \frac{2+2i}{4} = \frac{1+i}{4} = z_H$$

Signifie que $\varphi(I)=H$

$\varphi(J) = ?$ pour $z=z_J = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = \frac{1+i}{2}$

$$z' = -\left(\frac{1+i}{2}\right) \times \overline{\left(\frac{1+i}{2}\right)} + \frac{1+i}{2} = -\left|\frac{1+i}{2}\right|^2 + \frac{1+i}{2}$$

$$= -\frac{1}{2} + \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2}i = z_K$$

Signifie que $\varphi(J)=K$.

3)d) $f \circ s_{(IK)}$ est la composée d'une similitude

directe f et un antidéplacement $s_{(IK)}$

donc $f \circ s_{(IK)}$ est une similitude indirecte.

$$f \circ s_{(IK)}(I) = f(I) = H = \varphi(I)$$

$$f \circ s_{(IK)}(J) = f(A) = K = \varphi(J)$$

$f \circ s_{(IK)}$ et φ sont deux similitudes indirectes

qui coïncident en deux points distincts I et J

donc $\varphi = f \circ s_{(IK)}$.

4) a) Δ l'axe de la similitude indirecte

C le centre de φ } l'axe Δ porte la }
 $\varphi(J) = K$ } bissectrice de \widehat{JCK}

4) b) $\varphi(P)=f(P)$ signifie que $f^{-1} \circ \varphi(P) = P$

On sait que $\varphi = f \circ s_{(IK)} \Leftrightarrow f^{-1} \circ \varphi = s_{(IK)}$

$$f^{-1} \circ \varphi(P) = s_{(IK)}(P) = P \text{ car } P \in (IK)$$

$$f^{-1} \circ \varphi(P) = P \Leftrightarrow \varphi(P) = f(P)$$

AMMAR BOUJILA LYCEE JANOURA

Montrons que $\varphi(P) = Q$

$$\varphi(P) = f(P) \Leftrightarrow h_{\left(C, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)} \circ S_{\Delta}(P) = f(P)$$

$$\Leftrightarrow h_{\left(C, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)}(P) = f(P) \text{ car } P \in \Delta$$

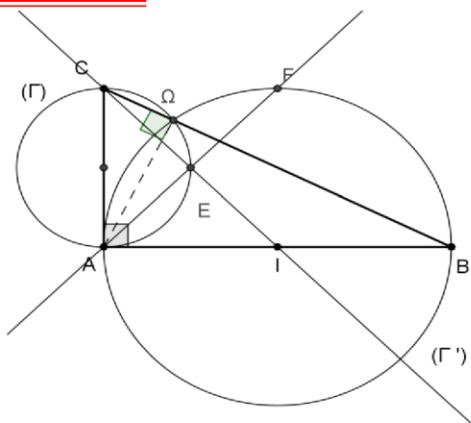
$$\Rightarrow f(P) \in (CP) = \Delta \quad \textcircled{1}$$

$$\text{D'autre part } P \in (IK) \Rightarrow f(P) \in f((IK)) = (HL) \quad \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ et } \textcircled{2} \Rightarrow f(P) \in \Delta \cap (HL) = \{Q\}$$

$$\text{Donc } \varphi(P) = Q \text{ car } \varphi(P) = f(P)$$

Exercice 2 :



1) S la similitude directe tq $S(A)=B$ et $f(C)=A$.

1) a) le rapport de S est $\frac{BA}{AC} = \frac{2AC}{AC}$

L'angle de S :

$$\widehat{(AC, BA)} \equiv \pi + \widehat{(AC, AB)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

1) b) Soit Ω le centre de S. On sait que l'angle de la similitude S est $\frac{\pi}{2}$ alors :

$$\left. \begin{matrix} S(\Omega) = \Omega \\ S(A) = B \end{matrix} \right\} \Rightarrow \widehat{(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\left. \begin{matrix} S(\Omega) = \Omega \\ S(C) = A \end{matrix} \right\} \Rightarrow \widehat{(\overline{\Omega C}, \overline{\Omega A})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\widehat{(\overline{\Omega C}, \overline{\Omega B})} \equiv \widehat{(\overline{\Omega C}, \overline{\Omega A})} + \widehat{(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B})} [2\pi] \equiv \pi [2\pi]$$

donc $\Omega \in (BC)$

Comme $\widehat{(\overline{\Omega A}, \overline{\Omega B})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ alors Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2) a) (Γ) est le cercle de centre J le milieu de [AC] et de rayon $R = \frac{AC}{2}$

(Γ') est le cercle de centre I le milieu de [AB] et de rayon $R' = \frac{AB}{2}$

$$\left. \begin{matrix} S([AC]) = [AB] \\ AB = 2AC \end{matrix} \right\} \Rightarrow \left. \begin{matrix} S(J) = I \\ R' = 2R \end{matrix} \right\} \Rightarrow S(\Gamma) = \Gamma'$$

2) b) S est une similitude d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$\left. \begin{matrix} S(C) = A \\ S(E) = F \end{matrix} \right\} \Rightarrow \widehat{(\overline{CE}, \overline{AF})} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow (CE) \perp (AF) \quad \textcircled{1}$$

D'autre part le triangle AEC est inscrit dans le cercle (Γ) de diamètre son coté [AC] donc $(AE) \perp (CE) \quad \textcircled{2}$

$\textcircled{1}$ et $\textcircled{2} \Rightarrow (AE) \parallel (AF) \Rightarrow$ Les points A, E et F sont alignés

Construction du point $F=S(E)$

$$\left. \begin{matrix} A, E \text{ et } F \text{ sont alignés} \Rightarrow F \in (AE) \\ E \in (\Gamma) \Rightarrow S(E) \in S(\Gamma) \Leftrightarrow F \in (\Gamma') \end{matrix} \right\} F \in (AE) \cap (\Gamma')$$

3)a) f la similitude indirecte tq $f(\Omega)=A$ et $f(A)=B$

le rapport de f est $\frac{AB}{\Omega A}$

En appliquant le théorème de Pythagore dans le triangle rectangle $AB\Omega$:

$$AB = \sqrt{\Omega A^2 + \Omega B^2} = \sqrt{\Omega A^2 + 4\Omega A^2} \text{ car } \Omega B = 2\Omega A = \sqrt{5} \Omega A$$

Donc le rapport de la similitude f est égal à $\sqrt{5}$

Montrons que $f((BC))=(AC)$.

$(BC) \perp (A\Omega) \Rightarrow f((BC)) \perp f((A\Omega))$ car une similitude conserve l'orthogonalité

Signifie que $f((BC)) \perp (AB)$ car $f(\Omega)=A$ et $f(A)=B$

D'autre part $\Omega \in (BC) \Rightarrow f(\Omega) = A \in f((BC))$

$$\left\{ \begin{matrix} f((BC)) \perp (AB) \\ A \in f((BC)) \end{matrix} \right. \Rightarrow \boxed{f((BC)) = (AC)}$$

3)b)

f est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{5} \neq 1$

donc $f \circ f$ est une homothétie de rapport $\sqrt{5}^2 = 5$

$f \circ f(\Omega) = f(A) = B$ donc le centre de

l'homothétie $f \circ f \in (\Omega B) = (BC)$

On sait que $f((BC)) = (AC) \Leftrightarrow$

$$f(f((BC))) = f((AC)) \Leftrightarrow$$

$\boxed{(BC) = f((AC))}$ car $f \circ f$ est une homothétie de centre $\in (BC)$

3)c)

$$\begin{aligned} \{C\} &= (AC) \cap (BC) \Rightarrow f(C) = f((AC) \cap (BC)) \\ &= (AB) \cap (AC) \\ &= C \end{aligned}$$

$f(C)=C$ signifie que C est le centre de f .
Soit Δ l'axe de la similitude indirecte f .

C le centre de f } l'axe Δ porte la
 $f(A) = B$ } \Rightarrow bissectrice de \widehat{ACB}

4) $(A, \overline{AI}, \overline{AC})$ est un R.O.D

4) a) S est la similitude directe de centre Ω ,

d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de rapport $2 \neq 1$. L'écriture complexe

de S est de la forme $z' = az + b$ avec

$$a = 2e^{i\frac{\pi}{2}} = 2i \quad \text{et} \quad z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}$$

Remarque : La relation $z_{\Omega} = \frac{b}{1-a}$ ne permet pas de calculer b car on ne sait pas les coordonnées de Ω dans le repère $(A, \overline{AI}, \overline{AC})$

Calcul de b par une autre méthode :

Dans le repère $(A, \overline{AI}, \overline{AC})$: $z_A = 0$, $z_B = 2$ et $z_C = i$

$$\begin{aligned} \text{On sait que } S(A) = B &\Leftrightarrow z_B = az_A + b \\ &\Leftrightarrow 2 = 2i \times 0 + b = b \end{aligned}$$

Conclusion : l'expression complexe de la

similitude directe S est $z' = 2iz + 2$

Calcul de l'affixe de z_{Ω}

$$z_{\Omega} = \frac{b}{1-a} \Leftrightarrow z_{\Omega} = \frac{2}{1-2i} = \frac{2(1+2i)}{1^2 - (2i)^2} = \frac{2}{5} + \frac{4}{5}i$$

Autrement :

Ω est le centre de la similitude $S \Leftrightarrow S(\Omega) = \Omega$

$$\Leftrightarrow z = 2iz + 2 \Leftrightarrow z(1-2i) = 2 \Leftrightarrow z = \frac{2}{1-2i}$$

4)b)

f est la similitude indirecte de centre C et de rapport $\sqrt{5} \neq 1$. L'écriture complexe de f est de

la forme $z' = a\overline{z} + b$

$$\begin{aligned} \begin{cases} f(C) = C \\ f(A) = B \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} z_C = a\overline{z_C} + b \\ z_B = a\overline{z_A} + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} i = -a \times i + b \\ 2 = a \times 0 + b \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 - 2i \\ b = 2 \end{cases} \end{aligned}$$

Conclusion : L'expression complexe de la similitude indirecte f est $z' = (-1-2i)\overline{z} + 2$

4)c) f est la similitude indirecte de centre C , de rapport $\sqrt{5}$ et d'axe Δ . D'après une propriété de l'axe Δ d'une similitude indirecte :

$$\begin{aligned} M \in \Delta &\Leftrightarrow \overline{CM'} = \sqrt{5} \overline{CM} \quad \text{où } M' = f(M) \\ &\Leftrightarrow z_{M'} - z_C = \sqrt{5}(z_M - z_C) \\ &\Leftrightarrow (-1-2i)\overline{z_M} + 2 - i = \sqrt{5}(z_M - i) \end{aligned}$$

On pose $M(x,y) \Leftrightarrow z_M = x + iy$

$$\Leftrightarrow (-1-2i)(x - iy) + 2 - i = \sqrt{5}(x + iy - i)$$

$$\Leftrightarrow -x + iy - 2ix - 2y + 2 - i = \sqrt{5}(x + iy - i)$$

$$\Leftrightarrow (-x(1+\sqrt{5}) - 2y + 2) + i(y(1-\sqrt{5}) - 2x - 1 + \sqrt{5}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -x(1+\sqrt{5}) - 2y + 2 = 0 \\ y(1-\sqrt{5}) - 2x - 1 + \sqrt{5} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1+\sqrt{5}) + 2y - 2 = 0 \\ -4y - 2(1+\sqrt{5})x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1+\sqrt{5}) + 2y - 2 = 0 \\ x(1+\sqrt{5}) + 2y - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(1+\sqrt{5}) + 2y - 2 = 0}$$

Exercice 3 :

$$f: M(z) \mapsto M'(z') \quad \text{tq} \quad z' = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$$

1) $\varphi: M(z) \mapsto M'(z')$ tq $z' = az + b$ où
 $a = \frac{3+i\sqrt{3}}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} \Rightarrow |a| = \frac{\sqrt{3}}{2} \neq 1$
 $\Rightarrow f$ est une similitude directe de rapport
 $|a| = \frac{\sqrt{3}}{2}$, d'angle $\arg(a) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ et de centre A
d'affixe

$$z_A = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{1-i\sqrt{3}}{2}}{1 - \frac{3+i\sqrt{3}}{4}} = \frac{2-2i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} = \frac{2+2i\sqrt{3}-2i\sqrt{3}+6}{1^2 - (i\sqrt{3})^2} = 2$$

Autrement : (Calcul de l'affixe du centre)

$$f(A) = A \Leftrightarrow z_A = \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z_A + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \dots$$

2) M un point d'affixe $z \neq 2$ et $M' = f(M)$

2) a)

$$\frac{z'-z}{z'-2} = \frac{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - z}{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - 2}$$

$$= \frac{\frac{-1+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2}}{\frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{-3-i\sqrt{3}}{2}} = \frac{\left(\frac{1-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}z+1\right)}{\left(\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}z+1\right)}$$

$$= -\frac{1-i\sqrt{3}}{3+i\sqrt{3}} = -\frac{(1-i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}{(3+i\sqrt{3})(3-i\sqrt{3})}$$

$$= -\frac{3-i\sqrt{3}-3i\sqrt{3}-3}{9+3} = \frac{4\sqrt{3}}{12}i = \frac{\sqrt{3}}{3}i \in i\mathbb{R}$$

$$\frac{z'-z}{z'-2} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_{M'} - z_M}{z_{M'} - z_A} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow$$

$$\frac{z_{MM'}}{z_{AM'}} \text{ est imaginaire pur} \Leftrightarrow \overline{MM'} \perp \overline{AM'}$$

\Rightarrow Le triangle AMM' est rectangle en M'

2) b) I le milieu de $[MA]$ et le triangle AMM'

rectangle en $M' \Rightarrow I$ est le centre du cercle

circonscrit à $AMM' \Rightarrow IM = IM' = IA$

$\Rightarrow IMM'$ est isocèle en I

$$MM' = |z_{M'} - z_M| = |z' - z|$$

$$= \left| \frac{3+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} - z \right| = \left| \frac{-1+i\sqrt{3}}{4}z + \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right|$$

$$= \left| \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \left(-\frac{1}{2}z + 1 \right) \right| = \left| \frac{1-i\sqrt{3}}{2} \right| \left| -\frac{1}{2}z + 1 \right|$$

$$= \frac{\sqrt{1+3}}{2} \left| -\frac{1}{2}z + 1 \right| = \left| -\frac{1}{2}z + 1 \right|$$

$$I \text{ est le milieu de } [AM] \Rightarrow z_I = \frac{z_A + z_M}{2} = \frac{2+z}{2}$$

$$IM = |z_M - z_I| = \left| z - \frac{2+z}{2} \right| = \left| \frac{1}{2}z - 1 \right| = \left| -\frac{1}{2}z + 1 \right|$$

Donc $IM = IM = MM'$ signifie que IMM' est équilatéral

Montrons que IMM' est direct. D'après 2)a) on a :

$$\frac{z'-z}{z'-2} = \frac{z_{MM'}}{z_{AM'}} = \frac{\sqrt{3}}{3}i \Rightarrow (\overline{AM'}, \overline{MM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$\Rightarrow (\overline{M'A}, \overline{M'M}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \Rightarrow AMM' \text{ est direct}$$

$\Rightarrow IMM'$ est direct car $I = M * A$

2)c) Construction du point M' connaissant M :

- On place le point A d'affixe 2
- On construit le point I le milieu de $[AM]$
- Le point M' image de M par la similitude directe f est le point tel que le triangle IMM' soit équilatéral direct.

Exercice 4 :

1)

$$\left. \begin{array}{l} (\Gamma) \text{ de centre A et de rayon 2} \\ (\Gamma') \text{ de centre B et de rayon } \sqrt{2} \end{array} \right\} \Rightarrow k = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$S(\Gamma) = \Gamma' \quad S(A) = B$$

L'expression complexe de la similitude directe est de la forme $z' = az + b$ où

$$a = ke^{i\theta} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = \frac{1+i}{2}$$

Calcul de b :

$$S(A) = B \Leftrightarrow z_B = az_A + b \Leftrightarrow 3 = \frac{1+i}{2}(2+i) + b$$

$$\Leftrightarrow 3 = \frac{2+i+2i-1}{2} + b = \frac{1+3i}{2} + b$$

$$\Leftrightarrow b = 3 - \frac{1+3i}{2} = \frac{5-3i}{2}$$

Conclusion :

L'expression complexe de la similitude

$$\text{directe } S \text{ est } \boxed{z' = \frac{1+i}{2}z + \frac{5-3i}{2}}$$

2) Calcul de l'affixe du centre I

$$z_I = \frac{b}{1-a} = \frac{\frac{5-3i}{2}}{1-\frac{1+i}{2}} = \frac{5-3i}{1-i} = \frac{(5-3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = 4+i$$

3) Calcul de l'affixe du point $O' = S(O)$.

$$S(O) = O' \Leftrightarrow z_{O'} = az_O + b$$

$$\Leftrightarrow z_{O'} = a \times 0 + b = b = \frac{5-3i}{2}$$

$$4) M \in (\Gamma) \Rightarrow S(M) \in S(\Gamma) \Leftrightarrow M' \in (\Gamma') \quad ①$$

$$S = S_{\left(1, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\pi}{4}\right)}^{\text{directe}} \text{ et } S(M) = M' \Rightarrow \widehat{(\overline{IM}, \overline{IM}')} = \frac{\pi}{4} [2\pi] \quad ②$$

① et ② $\Rightarrow M'$ est l'intersection de (Γ') et la demie droite [IT] tq $\widehat{(\overline{IM}, \overline{IT})} = \frac{\pi}{4} [2\pi]$ où $z_1 = 4 + i$

5) a) S' la similitude indirecte de centre I.

$$\left. \begin{array}{l} (\Gamma) \text{ de centre A et de rayon } 2 \\ (\Gamma') \text{ de centre B et de rayon } \sqrt{2} \\ S'(\Gamma) = \Gamma' \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} k = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ S'(A) = B \end{array}$$

L'expression complexe de la similitude indirecte

S' est de la forme $z' = a \overline{z} + b$

$$\left\{ \begin{array}{l} S'(I) = I \\ S'(A) = B \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} z_1 = a \overline{z_1} + b \\ z_B = a \overline{z_A} + b \end{array} \right\} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + i = a(4 - i) + b \\ 3 = a(2 - i) + b \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4 + i = a(4 - i) + 3 - a(2 - i) \\ b = 3 - a(2 - i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 + i = 2a \\ b = 3 - a(2 - i) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{1+i}{2} \\ b = 3 - \frac{1+i}{2}(2-i) = 3 - \frac{3+i}{2} = \frac{3-i}{2} \end{cases}$$

Conclusion :

L'expression complexe de la similitude

$$\text{indirecte } S' \text{ est } \boxed{z' = \frac{1+i}{2} \overline{z} + \frac{3-i}{2}}$$

5)b) Soit (Δ) l'axe de la similitude indirecte S' .

S' est la similitude indirecte de centre I,

de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$. D'après une propriété de l'axe

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \overline{IM'} = \frac{\sqrt{2}}{2} \overline{IM} \quad \text{où } M' = S'(M)$$

$$\Leftrightarrow z_{M'} - z_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (z_M - z_1)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1+i}{2} \overline{z_M} + \frac{3-i}{2} - 4 - i = \frac{\sqrt{2}}{2} (z_M - 4 - i)$$

On pose $M(x, y) \Leftrightarrow z_M = x + iy$

$$(1+i)(x - iy) + 3 - i - 8 - 2i = \sqrt{2}(x + iy - 4 - i) \Leftrightarrow$$

$$x - iy + ix + y - 5 - 3i = \sqrt{2}(x + iy - 4 - i) \Leftrightarrow$$

$$(x(1 - \sqrt{2}) + y - 5 + 4\sqrt{2}) + i(x - y(1 + \sqrt{2}) - 3 + \sqrt{2}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \sqrt{2}) + y - 5 + 4\sqrt{2} = 0 \\ x - y(1 + \sqrt{2}) - 3 + \sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \sqrt{2}) + y - 5 + 4\sqrt{2} = 0 \\ x(1 - \sqrt{2}) + y - 5 + 4\sqrt{2} = 0 \end{cases} \quad \times(1 - \sqrt{2})$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1 - \sqrt{2}) + y - 5 + 4\sqrt{2} = 0 \\ x(1 - \sqrt{2}) + y - 5 + 4\sqrt{2} = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{(\Delta) : x(1 - \sqrt{2}) + y - 5 + 4\sqrt{2} = 0}$$