

ARITHMETIQUE

Ces exercices d'arithmétique
sont posés aux anciens
examens Baccalauréat
à l'étranger

Exercice 1

- (a) Déterminer un couple (u, v) de nombres entiers relatifs tel que :
 $123u + 2003v = 1$
 - (b) en déduire un entier relatif k tel que $123k \equiv 1[2003]$
 - (c) Démontrer que : $(\forall x \in \mathbb{Z}) 123x \equiv 456 [2003] \Leftrightarrow x \equiv 456k [2003]$
 - (d) Déterminer l'ensemble des entiers x tel que : $123x \equiv 456[2003]$
 - (e) Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $123n \equiv 456 [2003]$ et $1 \leq n \leq 2002$.
- Soit a un entier naturel tel que $1 \leq a \leq 2002$
 - Déterminer $a \wedge 2003$
 - montrer qu'il existe un entier p tel que $ap \equiv 1[2003]$
 - Montrer que :
 $(\forall b \in \mathbb{N})(\exists!x \in \mathbb{N}) 0 \leq x \leq 2002$ et $ax \equiv b[2003]$.

Exercice 2

- On pose pour tout entier naturel $n : B_n = 3^n + 3^{2n} + 3^{3n}$.
- Déterminer suivant les valeurs de n les restes de la division euclidienne de 3^n par 13.

2. Déterminer les entiers n pour lesquels on a : $B_n \equiv 0[13]$

Exercice 3

- Soit n un entier naturel.
 - Montrer que si n est impair alors : $n^2 \equiv 1[8]$
 - Montrer que si n est pair alors : $n^2 \equiv 0[8]$ ou $n^2 \equiv 4[8]$
- a, b et c sont trois entiers naturels impairs .
 - Montrer que : $a^2 + b^2 + c^2$ n'est pas un carré parfait .
 - Montrer que : $2(ab + bc + ca) \equiv 6[8]$
(on pourra remarquer que : $(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$)
 - En déduire que : $2(ab + bc + ca)$ n'est pas un carré parfait.
 - Montrer que $ab + bc + ca$ n'est pas un carré parfait.

Exercice 4

- résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $(E) \quad 3x - 2y = 1$
- Soit n un entier naturel non nul .
 - Montrer que le couple $(14n + 3, 21n + 4)$ est une solution de l'équation (E) .
 - En déduire que : $(21n + 4) \wedge (14n + 3) = 1$
- Soit d le plus grand diviseur commun de $2n+1$ et $21n+4$.
 - Montrer que $d = 1$ ou $d = 13$.
 - Montrer que : $(n \equiv 6[13]) \Leftrightarrow (d = 13)$
- Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 2$, on pose m
 $A = 21n^2 - 17n - 4$ et $B = 28n^3 - 8n^2 - 17n - 3$
 - Montrer que les entiers A et B sont divisibles par $n - 1$ dans \mathbb{Z} .
 - Déterminer en fonction de n le plus grand diviseur commun de A et B .

Exercice 5

On considère dans \mathbb{N}^{*2} l'équation : $(E) \quad x^2(x^2 + 7) = y(2x + y)$.

Soit (x, y) un élément de \mathbb{N}^{*2} et soit δ le plus grand diviseur commun de x et y . On pose : $x = a\delta$ et $y = b\delta$.

- On suppose que (x, y) est une solution de (E) .
 - Verifier que : $a^2(\delta^2 a^2 + 7) = b(2a + b)$
 - En déduire qu'il existe un entier naturel k tel que :
 $2a + b = ka^2$ et $\delta^2 a^2 + 7 = kb$
 - Montrer que $a = 1$
 - En déduire que : $(b + 1)^2 = \delta^2 + 8$
- Résoudre dans \mathbb{N}^{*2} l'équation (E) .

Exercice 6

Soit $n \in \mathbb{Z} \setminus \{-2001, 2\}$, on pose : $g(n) = \frac{n+2001}{n-2}$

- Montrer que : $(n - 2) \wedge (n + 2001) = (n - 2) \wedge 2003$
 - Verifier que 2003 est un nombre premier .
 - En déduire les valeurs possibles de $(n - 2) \wedge (n + 2001)$.
 - Déterminer l'ensemble des entiers relatifs n tel que
 $(n - 2) \wedge (n + 2001) = 2003$
- Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $g(n) \in \mathbb{Z}$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}$ tel que $p \neq q$ et $p \wedge q = 1$.
 - Montrer que $q^2 \wedge (p^2 - q^2) = 1$
 - Montrer que : $g(n) = \left(\frac{p}{q}\right)^2 \Leftrightarrow n = 2 + \frac{2003q^2}{p^2 - q^2}$
 - Déterminer p , q et n pour que : $g(n) = \left(\frac{p}{q}\right)^2$ et
 $p \wedge q = 1$

Exercice 7

Soit n un entier naturel tel que $n > 3$. On pose : $A = n^3 + 3n^2 + 2n - 4$, $B = n^2 + 2n - 1$ et $C = n - 3$.

- Déterminer l'entier x_n tel que : $A = Bx_n + C$
- Montrer que $A \wedge B = C \wedge 14$
- Déterminer l'ensemble des valeurs de $n \in \mathbb{N}$ tel que
 $A \wedge B = 7$

4. Déterminer les entiers naturels n pour lesquels on a :
 $A \wedge B = 1$.

Exercice 8

Pour tout entier naturel n tel que $n \geq 5$, on pose :
 $x = n^3 - n^2 - 12n$ et $y = 2n^2 - 7n - 4$.

- Montrer que $(n - 4) | x$ et $(n - 4) | y$
- On pose $a = 2n + 1$ et $b = n + 3$
 - Trouver une relation entre a et b indépendante de n .
 - Montrer que : $(a \wedge b) | 5$
 - Montrer que : $5 | a$ et $5 | b \Leftrightarrow 5 | n - 2$
- Montrer que : $(2n + 1) \wedge n = 1$
- Déterminer $x \wedge y$. (On discutera suivant n)
 - Etudier les cas respectifs : $n = 11$; $n = 12$.

Exercice 9

Soit n un entier naturel premier. On considère l'équation :

$$(E) \quad (x, y) \in \mathbb{N}^{*2} \quad x^3 - y^3 = n.$$

- Montrer que si (x_0, y_0) est une solution de (E) alors :

$$\begin{cases} x_0 - y_0 = 1 \\ x_0^2 + x_0 y_0 + y_0^2 = n \\ 3x_0 y_0 = n - 1 \end{cases}$$
 - Montrer que si $n \neq 3k + 1$ pour tout $k \in \mathbb{N}$ alors l'équation (E) n'admet aucune solution.
 - Montrer que si l'équation (E) admet une solution alors elle est unique.
- Montrer que si le système $\begin{cases} x - y = 1 \\ 3xy = n - 1 \end{cases}$ admet une solution alors il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $4n - 1 = 3(2k + 1)^2$

Exercice 10

Soient a et b deux entiers naturels non nuls tel que a^2 divise $2b^2$. On pose : $a \wedge b = d$ et $a = da'$ et $b = db'$.

- Montrer que $a'^2 \wedge b'^2 = 1$

- Montrer que a'^2 divise $2b'^2$ et déduire que $a' = 1$ et que $a | b$.

- Soient x, y et n des entiers naturels non nuls tels que :
 $(x - 2n)(y - 2n) = 2n^2$; on pose : $\delta = x \wedge y$ et $d = (x - 2n) \wedge (y - 2n)$.

- Montrer que $d | n$ puis que : $d | \delta$.
- Montrer que $x^2 + y^2 = (x + y - 2n)^2$
- Montrer que $\delta | d$ et déduire que : $x \wedge y = (x - 2n) \wedge (y - 2n)$

Exercice 11

Soit p un entier naturel premier tel que : $p \geq 7$.

- Montrer que : $p \equiv 1[3]$ ou $p \equiv -1[3]$.
- En déduire que $3 | p^4 - 1$
- Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$ (on pourra remarquer que p est impair) et montrer que $16 | p^4 - 1$.
- Montrer que : $5 | p^4 - 1$
- Soient a, b et c des entiers naturels non nuls. Montrer que : $a | c$ et $b | c$ et $a \wedge b = 1 \Rightarrow ab | c$
 - En déduire que : $240 | p^4 - 1$

Exercice 12

On considère les suites (x_n) et (y_n) définies par : $x_0 =$

$$3 \text{ et } y_0 = 1 \text{ et } (\forall n \in \mathbb{N}) \text{ et } \begin{cases} x_{n+1} = 2x_n - 1 \\ y_{n+1} = 2y_n + 3 \end{cases}$$

- Montrer par récurrence que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n = 2^{n+1} + 1$
- Calculer $x_8 \wedge x_9$ et $x_{2002} \wedge x_{2003}$
- Est ce que x_n et x_{n+1} sont premiers entre eux ?
- Montrer que pour tout entier naturel n on a : $2x_n - y_n = 5$ et en déduire y_n en fonction de n .
- Déterminer suivant les valeurs de p le reste de la division euclidienne de 2^p par 5 pour $p \in \mathbb{N}$.
- Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad x_n \wedge y_n = 1$ ou $x_n \wedge y_n = 5$
- on a : $x_n \wedge y_n = 5$

Exercice 13

Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$; On pose : $A = n^2 - 2n + 2$; $B = n^2 + 2n + 2$
 et on note : $d = A \wedge B$.

1. Montrer que $n^4 + 4$ n'est pas premier.
2. Montrer que pour tout entier non nul x on a :
 $x|A$ et $x|n \Rightarrow x|2$
3. Montrer que pour tout entier non nul x on a :
 $x|A$ et $x|B \Rightarrow x|4n$
4. On suppose que n est impair .
 - (a) Montrer que A et B sont impairs puis que d est impair
 - (b) Montrer que $d|n$
 - (c) En déduire que $d|2$ et que $A \wedge B = 1$
5. On suppose que n est pair .
 - (a) Montrer que 4 ne divise pas A
 - (b) Montrer que d s'écrit sous la forme : $d = 2p$ avec p impair.
 - (c) Montrer que $p|n$ et en déduire que $d = 2$

Exercice 14

1. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}) (n + 3)|(3n^3 - 11n + 48)$
2. Montrer que pour tout entier n tel que $n \geq 2$ on a :
 $3n^2 - 9n + 16 \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3}$ tel que $bc \neq a$, on
 a : $a \wedge b = (bc - a) \wedge b$.
4. Montrer que : $(\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\})(3n^3 - 11n) \wedge (n + 3) = 48 \wedge (n + 3)$
5. Déterminer l'ensemble des entiers naturels n tel
 que : $\frac{3n^3 - 11n}{n + 3} \in \mathbb{N}$

Exercice 15

Pour tout entier naturel non nul n , on pose : $a_n = 4.10^n - 1$
 ; $b_n = 2.10^n - 1$; $c_n = 2.10^n + 1$.

1. Calculer a_3, b_3 et c_3 .
2. Montrer que : $3|a_n$ et $3|c_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Montrer que $b_n c_n = a_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et en déduire
 la décomposition en facteurs premiers de a_6 .
4. Montrer que : $b_n \wedge c_n = c_n \wedge 2$ et en déduire que b_n et c_n
 sont premiers entre eux.
5. On considère l'équation : (1) $b_3 x + c_3 y = 1$
 - (a) Déterminer une solution particulière de l'équation
 (1) (on donne : 1999 est un nombre premier)
 - (b) Résoudre l'équation (1).

Exercice 16

Soit p un entier naturel premier tel que $p \geq 7$.

1. Montrer que : $p \equiv 1 [3]$ ou $p \equiv -1 [3]$
2. En déduire que : $3|p^4 - 1$
3. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que : $p^2 - 1 = 4k(k + 1)$
 et que $16|p^4 - 1$.
4. Montrer que $5|p^4 - 1$.
5. (a) Montrer que : $(\forall (a, b, c) \in \mathbb{N}^{*3} a|c$ et $b|c$ et $a \wedge b = 1$
 $\Rightarrow ab|c$
- (b) En déduire que $240|p^4 - 1$

Exercice 17

1. Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $17x - 7y = 1$
2. résoudre dans \mathbb{Z} le système d'équations : $\begin{cases} x \equiv -2 [7] \\ x \equiv 2 [17] \end{cases}$
3. résoudre dans \mathbb{Z} l'équation : $x^2 \equiv 4 [119]$

Exercice 18

On considère dans \mathbb{Z}^2 l'équation : (E) $4x^2 - 9y^2 = 432$

1. (a) Montrer que si (x, y) est une solution de l'équation
 (E) alors $3|x$ et $2|y$
- (b) Montrer que si (α, β) est une solution de l'équa-
 tion : $X^2 - Y^2 = 12$ alors $(3\alpha, 2\beta)$ est une solution
 de l'équation (E).
2. (a) résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation : $X^2 - Y^2 = 12$.

(b) En déduire les solutions de l'équation (E)

Exercice 19

1. On pose : $a = pn$ et $b = p(n - 1)$ avec $p \in \mathbb{N}^*$ et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Montrer que : $a \wedge b = a - b$.
2. Montrer que si a et b sont deux nombres entiers naturels non nuls tels que : $a \wedge b = a - b$ alors il existe deux entiers naturels n et p tels que : $a = pn$ et $b = p(n - 1)$
3. Application : Soient x et y deux entiers naturels non nuls, on considère : $a = 40x(3y + 2)$; $b = 15x(8y + 5)$; $c = 24x(5y + 3)$.
 - (a) Déterminer : $a \wedge b$ et $b \wedge c$.
 - (b) Vérifier que x est le plus grand diviseur commun des nombres a, b et c

Exercice 20

Soit a un entier naturel tel que $a > 1$ et p un nombre premier.

1. (a) Montrer que si p est premier avec deux nombres entiers naturels respectifs x et y alors p est premier avec leur produit xy
 - (b) En déduire que si $p > a$ alors p est premier avec $a!$
 - (c) Situer les nombres premiers qui divisent $a!$.
2. Dans cette question, on suppose que $p \leq a$ et on veut déterminer le plus grand entier naturel α tel que p^α divise $a!$.
 - (a) Montrer que parmi les facteurs : $1; 2; 3; \dots; a$ de $a!$, ceux qui sont divisibles par p sont : $p, 2p, \dots, qp$ avec q le quotient de la division euclidienne de a par p .
 - (b) Vérifier que le produit de ces derniers vaut $\gamma = (q!)p^q$ et que $\gamma | (a!)$.
 - (c) Montrer que si $p > q$ alors $\alpha = q$ puis que si $p \leq q$ et si q_1 est le quotient de la division euclidienne de q par p alors p^{q+q_1} divise $a!$

3. On prends $a = 156$ et $p = 5$. En appliquant les résultats de la question précédente un nombre de fois déterminer le plus grand entier naturel α tel que 5^α divise $(156!)$

Exercice 21

On considère deux nombres entiers naturels non nuls a et b tels que :
$$\begin{cases} a^2 + b^2 = 625 \\ a \wedge b = 1 \end{cases}$$

1. Montrer que l'un des nombres a et b est pair et l'autre impair.
2. On suppose que a est pair
 - (a) Montrer que $(25 - a) \wedge (25 + a) = 1$
 - (b) Montrer qu'il existe deux entiers naturels impairs m et n tels que : $25 + a = m^2$ et $25 - a = n^2$ et $m \wedge n = 1$
3. Déterminer les nombres a et b
4. Déduire de ce qui précède les solutions de l'équation : $(x, y) \in \mathbb{N}^{*2}$ $x^2 + y^2 = 625$

Exercice 22

Soient a et b deux nombres entiers relatifs.

1. (a) Montrer que tout diviseur commun de $a - b$ et $a^2 - ab + b^2$ est un diviseur commun de a^2 et b^2 .
 - (b) En déduire que si les nombres a et b sont premiers entre eux alors les nombres $a - b$ et $a^2 - ab + b^2$ sont premiers entre eux.
2. (a) Trouver a et b tel que a et b sont premiers entre eux et $13(a - b) = 4(a^2 - ab + b^2)$.
 - (b) Résoudre dans \mathbb{Z}^2 l'équation $13(a - b) = 4(a^2 - ab + b^2)$

Exercice 23

$x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3$ sont des nombres entiers naturels non nuls tels que : $x_1 y_1 = x_2 y_2 = x_3 y_3 = M$. On pose :

$$d_x = (x_1 \wedge x_2 \wedge x_3) \text{ et } d_y = (y_1 \wedge y_2 \wedge y_3)$$

et

$$m_x = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \text{ et } m_y = (y_1 \vee y_2 \vee y_3)$$

1. Montrer que M est un multiple de chacun des entiers : d_x, d_y, m_x et m_y .
2. On pose : $M = d_x M'$
 - (a) Montrer qu'il existe des entiers naturels non nuls x'_1, x'_2 et x'_3 premiers entre eux dans leur ensemble et vérifiant : $M' = x'_1 y_1 = x'_2 y_2 = x'_3 y_3$
 - (b) En déduire que M' est un multiple de m_y .
3. On pose $M' = m_y M''$. Soient z_1, z_2 et z_3 les entiers naturels tels que : $m_y = z_1 y_1 = z_2 y_2 = z_3 y_3$
 - (a) Montrer que : $x'_1 = z_1 M''$ et $x'_2 = z_2 M''$ et $x'_3 = z_3 M''$
 - (b) Montrer que $M'' = 1$ et que $M = d_x m_y$.
4. Montrer que :

$$m_x = \frac{x_1 x_2 x_3}{(x_2 x_3) \wedge (x_3 x_1) \wedge (x_1 x_2)}$$

et

$$d_x = \frac{x_1 x_2 x_3}{(x_2 x_3) \vee (x_3 x_1) \vee (x_1 x_2)}$$

(on pourra prendre : $y_1 = x_2 x_3$; $y_2 = x_3 x_1$; $y_3 = x_1 x_2$)

Exercice 24

Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $k \neq -3$.

1. Montrer que les deux nombres $k + 3$ et $2k^2 + 5k - 2$ sont premiers entre eux.
2. Discuter suivant les valeurs de k la valeur du plus grand diviseur commun des deux nombres $k + 3$ et $4k^2 + 11k + 4$.
3. On considère le nombre $A = \frac{(4k^2 + 11k + 4)(2k^2 + 5k - 2)}{k + 3}$. Pour quelles valeurs de k le nombre A est-il un nombre entier relatif ?

Exercice 25 Soient a et b deux nombres entiers naturels tels que : $0 < b < a$ et b^2 est divisible par a .

1. Soit d le plus grand diviseur commun des deux nombres a et b . On pose : $a = da_1$ et $b = db_1$.
 - (a) Montrer que les deux nombres a_1 et b_1 sont premiers entre eux.
 - (b) Montrer que le nombre a_1 divise le nombre d et que le nombre a_1^2 divise le nombre a .
2. On écrit le nombre a sous la forme : $a = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_n^{\alpha_n}$ tel que les nombres p_i pour $1 \leq i \leq n$ sont premiers et différents deux à deux et les nombres α_i pour $1 \leq i \leq n$ sont des entiers naturels non nuls.
 - (a) Montrer que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ on a : $p_i | b$.
 - (b) Montrer que le nombre b admet une écriture sous la forme : $(b = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_n^{\beta_n})c$ avec, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, β_i est un entier naturel vérifiant : $\alpha_i \leq 2\beta_i$ et $a \wedge c = 1$. les

Exercice 26

1. a, b et k sont des entiers relatifs tel que : $a \neq 0$ et $b \neq 0$. Montrer que si $a \neq bk$ alors : $a \wedge b = b \wedge (a - bk)$.
2. Soit n un entier naturel non nul tel que $n \geq 4$. On pose : $A = n^2 - n - 10$ et $B = n + 4$.
 - (a) Montrer que : $A \wedge B = B \wedge 10$
 - (b) Déterminer les valeurs de n pour lesquelles $B | A$.
 - (c) On pose : $A' = \frac{A}{A \wedge B}$ et $B' = \frac{B}{A \wedge B}$
 - i. Montrer que
 $(A \wedge B = 5 \text{ et } A \vee B = 300) \Leftrightarrow A'B' = 60 \text{ et } B' \text{ est impair}$
 - ii. En déduire le nombre entier naturel n pour lequel on a : $A \wedge B = 5$ et $A \vee B = 300$

Exercice 27

1. Montrer que pour tout nombre entier naturel a et pour tout nombre entier naturel impair m on a : $(a+1) | a^m + 1$.

2. Soit q un entier naturel premier et $a \in \mathbb{N}$.
- (a) Montrer que : $(a + 1)^q \equiv a^q + 1 [q]$
 - (b) En déduire que $a^q \equiv a [q]$
3. Pour tout entier naturel n tel que $n > 1$ on pose :
- $$a_n = (n!)^2 + 1$$
- (a) Montrer que a_n est impair.
 - (b) Montrer que a_n admet un diviseur premier p tel que $p > n$.
 - (c) On suppose que p s'écrit sous la forme (1) : $p = 4k + 3$ avec $k \in \mathbb{N}$. Montrer que le nombre $1 + (n!)^{2(2k+1)}$ est divisible par a_n et que p divise $n! + (n!)^p$. (On pourra remarquer que : $p - 1 = 2(2k + 1)$)
 - (d) En déduire que le nombre p ne peut s'écrire sous la forme (1) ci-dessus .
4. Déduire de ce qui précède qu'il y'a une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 1$ avec $k \in \mathbb{N}$.

