

Exercice n°1:

1) On a : $z^2 - 2z + 4 = 0, z \in \mathbb{C}$.

a) $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 4 - 16 = -12 = (2i\sqrt{3})^2$.

Donc $\delta = 2i\sqrt{3}$ et alors $z' = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ et $z'' = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{2 - 2i\sqrt{3}}{2} = 1 - i\sqrt{3}$.

$S_c = \{1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}\}$.

b) On a : $z' = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \right)$ sa forme exponentielle est alors $z' = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Comme $z'' = \bar{z}'$ alors sa forme exponentielle est $z'' = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

2) La droite d'équation $x = 1$ coupe (Γ) en B et C (Voir figure).

3) Soit $\theta \in]-\pi, \pi]$ et le point $M(2e^{i\theta})$. $N \in (\Gamma)$ et $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$.

On a alors $|z_N| = 2$ et $\arg(z_N) \equiv \theta + \frac{\pi}{3} [2\pi]$ d'où $z_N = 2e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$.

4) a) Soient $M(z)$ et $M'(z') = r(M)$. On a $\begin{cases} AM = AM' \\ (\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AM'}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z' - z_A = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - z_A)$

$\Leftrightarrow z' - 2 = e^{i\frac{\pi}{3}} (z - 2) \Leftrightarrow z' = e^{i\frac{\pi}{3}} z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

b) On a $F = B * M$ donc $z_F = \frac{z_M + z_B}{2} = \frac{2e^{i\theta} + 2e^{i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}}$

On a $K = C * N$ donc $z_K = \frac{z_N + z_C}{2} = \frac{2e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} + 2e^{-i\frac{\pi}{3}}}{2} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

Montrons que $r(F) = K$?

On a : $e^{i\frac{\pi}{3}} z_F + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\frac{\pi}{3}} \left(e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} \right) + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} + e^{2i\frac{\pi}{3}} + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$

$= e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} - \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{3} + 2 - 1 - i\sqrt{3} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} + \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{3} = e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right)} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = z_K$ et alors $r(F) = K$.

c) Comme $r(F) = K$ alors $\begin{cases} AF = AF \\ \left(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AF'} \right) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases}$ donc le triangle AFK est équilatéral.

5) a) On a : $AF^2 = |z_F - z_A|^2 = \left| e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \right|^2 = \left| \cos(\theta) + i \sin(\theta) + \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - 2 \right|^2 = \left| \left(\cos(\theta) - \frac{3}{2} \right) + i \left(\sin(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right|^2$

$$= \left(\cos(\theta) - \frac{3}{2} \right)^2 + \left(\sin(\theta) + \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = \cos^2(\theta) - 3 \cos(\theta) + \frac{9}{4} + \sin^2(\theta) + \sqrt{3} \sin(\theta) + \frac{3}{4}$$

$$= 4 - 3 \cos(\theta) + \sqrt{3} \sin(\theta) = 4 - 2\sqrt{3} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \cos(\theta) - \frac{1}{2} \sin(\theta) \right) = 4 - 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right).$$

b) Posons $f(\theta) = 4 - 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$, $\theta \in]-\pi, \pi]$.

AF maximale $\Leftrightarrow f'(\theta) = 0 \Leftrightarrow 2\sqrt{3} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \theta + \frac{\pi}{6} = k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\Leftrightarrow \theta = -\frac{\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$, et comme $\theta \in]-\pi, \pi]$ alors $\theta = \frac{5\pi}{6}$.

Voir figure

Exercice n°2:

1) * Le rapport de f est $k = \frac{AC}{AB} = \tan(\widehat{ABC}) = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

* L'angle de f est $\theta \equiv \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \right) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

2) a) Le rapport de g est $k' = \frac{AB}{AC} = \frac{1}{k} = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

b) l'axe Δ de g porte la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{BAC} .

c) Soit D le point défini par $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$. Montrons que $g(B) = D$?

Posons $g(B) = B'$. Comme g est une homothétie de centre A et de rapport $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 = \frac{1}{3}$ et puisque

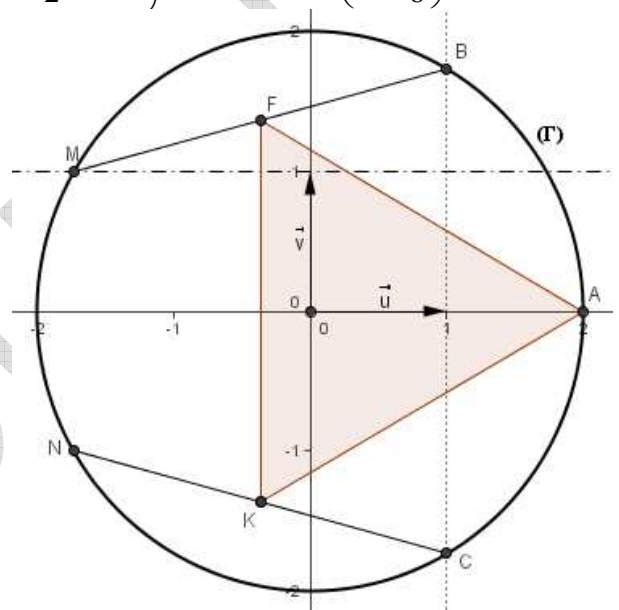
$g(C) = B'$, alors $\overrightarrow{AB'} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{AB'} = \overrightarrow{AD} \Leftrightarrow B' = D$, d'où **$g(B) = D$** .

* Montrons que $[BD]$ est la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{ABC} ?

Comme $g(A) = A$, $g(B) = D$ et $g(C) = B$ alors les triangles ABC et ADB sont semblables et par suite on a $\widehat{ACB} = \widehat{ABD}$, or $\widehat{ACB} = \frac{\pi}{6}$ alors $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{6}$ et on a aussi $\widehat{CBD} = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$ donc $\widehat{ABD} = \widehat{CBD}$ ce qui

donne **$[BD]$ est la bissectrice intérieure de l'angle \widehat{ABC}** .

3) a) fog est la composée d'une similitude directe f, de rapport $\sqrt{3}$, et d'une similitude indirecte g, de rapport



$\frac{1}{\sqrt{3}}$, alors fog est une similitude indirecte de rapport $\sqrt{3} \times \frac{1}{\sqrt{3}} = 1$ donc **g est un antidéplacement.**

Comme fog(A) = A et fog(C) = C alors fog = $S_{(AC)}$.

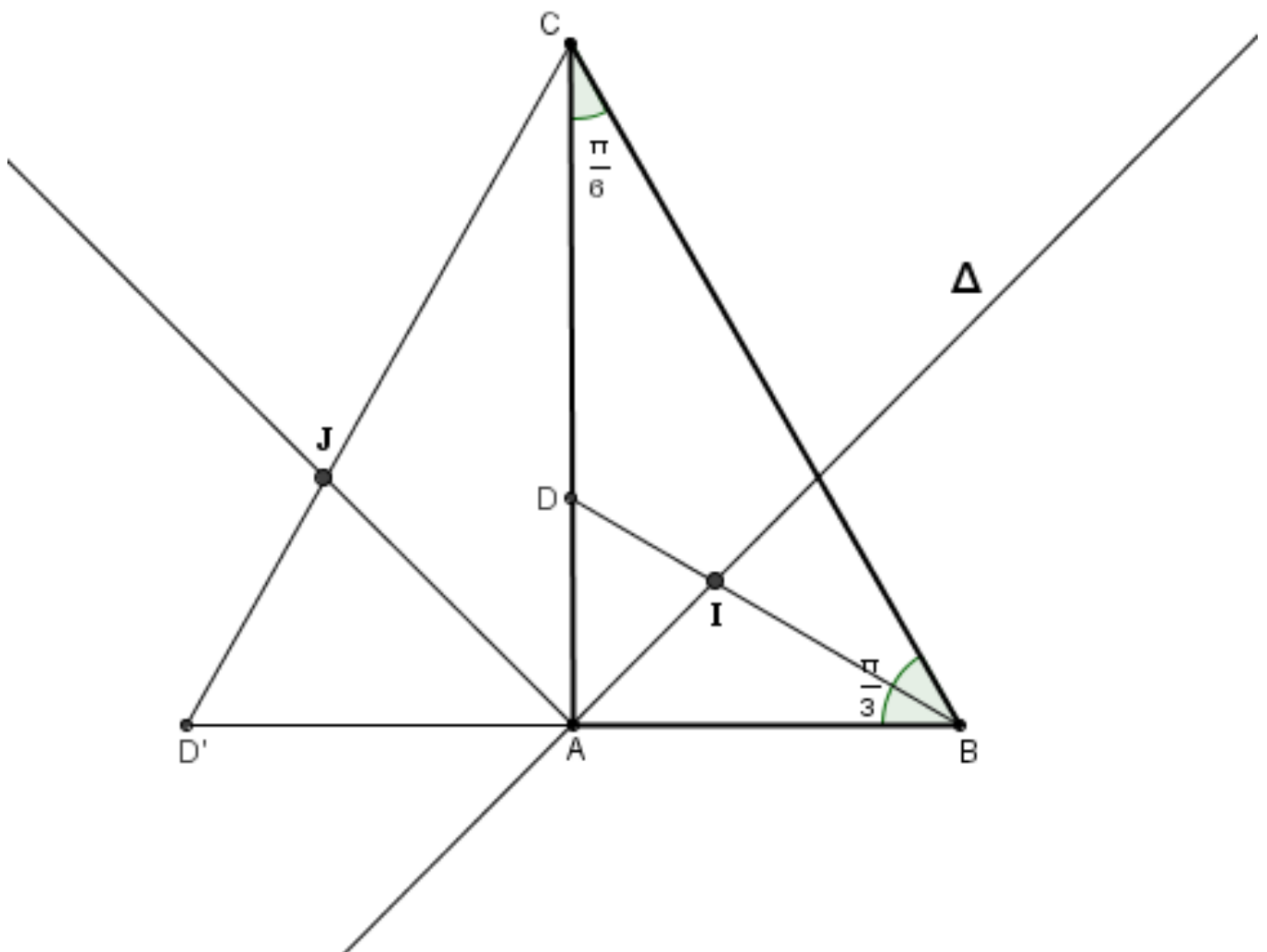
$$\begin{aligned}
 \text{b) } D' = f(D) &\Leftrightarrow \begin{cases} AD' = \sqrt{3}AD \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD' = \sqrt{3}AD \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AD'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD' = \sqrt{3} \times \frac{1}{3}AC \\ (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD'}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \\
 &\Leftrightarrow \begin{cases} AD' = \frac{AC}{\sqrt{3}} \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD'}) \equiv \pi[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} AD' = AB \\ (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD'}) \equiv \pi[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow A = B * D' \Leftrightarrow \underline{D' = S_A(B)}.
 \end{aligned}$$

4) Déterminons f(I)...

On a f(B) = C et f(D) = D' donc $f((BD)) = (CD')$.

On a aussi $S_{(AC)}(\Delta) = (AJ)$ et fog(Δ) = f(Δ) (car g(Δ) = Δ). Alors $f(\Delta) = (AJ)$.

Comme $\{I\} = \Delta \cap (BD)$ alors $\{f(I)\} = f(\Delta) \cap f((BD)) \Leftrightarrow \{f(I)\} = (AJ) \cap (CD')$ d'où $f(I) = J$.



Exercice n°3:

1) (E): $47x + 53y = 1$.

a) On a : $47 \times (-9) + 53 \times 8 = -423 + 424 = 1$ donc $(-9, 8)$ est une solution de (E).

b) * Si (x, y) est solution de (E) alors $47x + 53y = 1 \Leftrightarrow 47x + 53y = 47 \times (-9) + 53 \times 8 \Leftrightarrow 47(x+9) = 53(8-y)$

On a $\begin{cases} 53/47(x+9) \\ 53 \wedge 47 = 1 \end{cases}$ alors $53/(x+9)$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x+9 = 53k \Leftrightarrow \underline{x = 53k - 9}$

Comme $47(x+9) = 53(8-y)$ alors $47 \times 53k = 53(8-y)$, on trouve $\underline{y = 8 - 47k}$

* Réciproquement, si $(x, y) = (53k - 9, 8 - 47k)$ alors $47x + 53y = 47 \times (53k - 9) + 53 \times (8 - 47k)$
 $= 47 \times 53k - 47 \times 9 + 53 \times 8 - 53 \times 47k = 1$. Donc (x, y) est solution de (E).

Conclusion: $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(53k - 9, 8 - 47k), k \in \mathbb{Z}\}$.

c) * Si x est un inverse de 47 modulo 53 $\Leftrightarrow 47x \equiv 1 \pmod{53} \Leftrightarrow$ il existe un entier y tel que $47x = 1 + 53y$
 $\Leftrightarrow 47x - 53y = 1 \Leftrightarrow (x, -y)$ est solution de (E) et par suite $x = 53k - 9, k \in \mathbb{Z}$.

* Réciproquement si $x = 53k - 9, k \in \mathbb{Z}$, alors $47x = 47 \times 53k - 9 \times 47 = 47 \times 53k + 1 - 53 \times 8 \equiv 1 \pmod{53}$

Conclusion: L'ensemble des inverses de 47 modulo 53 est $\{53k - 9, k \in \mathbb{Z}\}$.

d) Si $k = 1$ alors $53k - 9 = 53 - 9 = 44$ c'est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2) a) Comme 53 est premier et $45 \wedge 53 = 1$, d'après le théorème de Fermat on a $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$.

b) Comme $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$ alors $45^{2 \times 52} \equiv 1 \pmod{53}$, par suite $45^{104} \equiv 1 \pmod{53}$.

D'où $45^{106} \equiv 45^2 \pmod{53} \Leftrightarrow 45^{106} \equiv (-8)^2 \pmod{53} \Leftrightarrow 45^{106} \equiv 11 \pmod{53}$.

Le reste de 45^{106} modulo 53 est égal à 11.

3) a) N est la somme des 106 premiers termes d'une suite géométrique de raison 45 et de premier terme 1

donc $N = \frac{45^{106} - 1}{45 - 1}$ donc $44N = 45^{106} - 1$ par suite $44N \equiv 10 \pmod{53}$.

b) On a $44N \equiv 10 \pmod{53} \Leftrightarrow -9N \equiv 10 \pmod{53} \Leftrightarrow -54N \equiv 60 \pmod{53} \Leftrightarrow -N \equiv 7 \pmod{53}$

$\Leftrightarrow N \equiv -7 \pmod{53} \Leftrightarrow N \equiv 46 \pmod{53}$ donc le reste de N modulo 53 est égal à 46.

Exercice n°4:

$f(x) = e^{\sin x}, x \in [0, \pi]$.

1) a) $f'(x) = \cos(x) e^{\sin x}$.

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2}$ (Car $x \in [0, \pi]$).

Voir le tableau de variation de f:

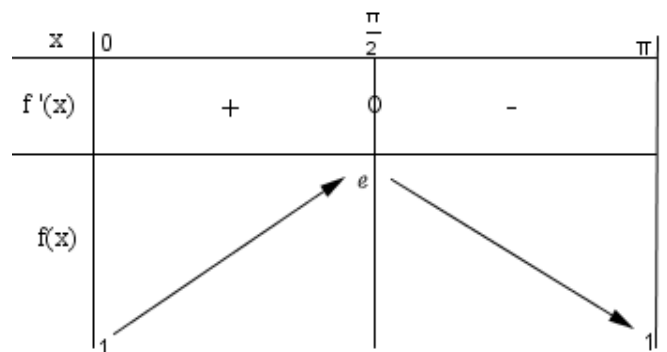
b) On a : $x \in [0, \pi] \Leftrightarrow -x \in [-\pi, 0] \Leftrightarrow (\pi - x) \in [0, \pi]$.

et $f(\pi - x) = e^{\sin(\pi - x)} = e^{\sin x} = f(x)$. Donc la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) .

c) On a : (T): $y = f'(0)(x - 0) + f(0) \Leftrightarrow$ (T): $y = x + 1$. (car $f'(0) = f(0) = 1$).

2) a) * D'après le tableau de variation de g on a $g\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right) > 0$ et g ne s'annule pas sur $\left[0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$.

* La fonction g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}, 1\right]$ donc elle réalise une bijection



de $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right]$ sur $\left[-1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$; et comme $0 \in \left[-1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)\right]$ alors l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $\left[\frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1\right]$.

Conclusion: l'équation $g(x)=0$ admet une solution unique $\alpha \in]0,1[$.

b) * Si $x \in [0, \alpha]$ on a $g(x) \geq 0$.

* Si $x \in [\alpha, 1]$ on a $g(x) \leq 0$.

3) On a $h(x) = e^{\sin x} - (x+1)$, $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a) On a $h'(x) = \cos(x)e^{\sin x} - 1 = \sqrt{1 - (\sin x)^2} \cdot e^{\sin x} - 1 = g(\sin x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

b) la fonction sinus est continue et strictement croissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, donc elle réalise une bijection de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ sur $[0,1]$; et comme $\alpha \in [0,1]$ alors il existe un unique réel $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ tel que $\sin \beta = \alpha$.

c) On a : $\sin\left(\left[0, \beta\right]\right) = [\sin(0), \sin \beta] = [0, \alpha]$ et $\sin\left(\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[\sin \beta, \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [\alpha, 1]$.

d) Tableau de variation de h:

* $h(0) = 0$

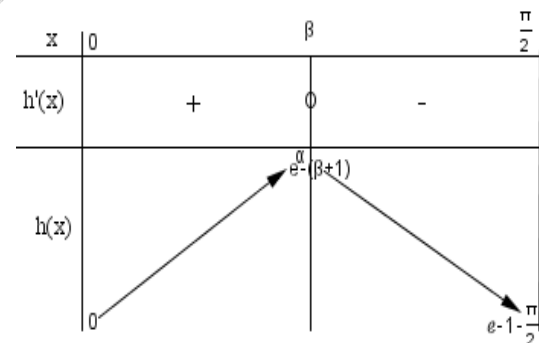
* $h(\beta) = e^{\sin \beta} - (\beta+1) = e^\alpha - (\beta+1)$.

* $h\left(\frac{\pi}{2}\right) = e^{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)} - \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) = e - 1 - \frac{\pi}{2}$

e) Comme $e - 1 - \frac{\pi}{2} > 0$ alors $h(x) > 0$ et par suite $f(x) \geq x+1$

pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

\Rightarrow La courbe (C_f) est au dessus de la tangente (T) sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.



II) 1) a) Montrons que pour tout réel $x \geq 0$ on a $\sin x \leq x$?

Posons $\Phi(x) = x - \sin x$, $x \geq 0$.

On a : $\Phi'(x) = 1 - \cos x \geq 0$, pour tout $x \geq 0$. Donc Φ est croissante sur \mathbb{R}_+ .

Par suite pour tout $x \geq 0$ on a $\Phi(x) \geq \Phi(0) \Leftrightarrow \Phi(x) \geq 0$ (car $\Phi(0) = 0$) $\Leftrightarrow \sin x \leq x$.

b) Comme $\sin x \leq x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, alors $e^{\sin x} \leq e^x$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et alors $f(x) \leq e^x$.

c) Pour placer le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ on trace la droite d'équation $x = 1$ qui coupe la courbe de la fonction exponentielle au point de coordonnées $(1, e)$, on place alors le point de (C_f) de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, e\right)$ (Voir figure).

2) a) Pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on a $f(x) \leq e^x$, alors $\int_0^1 f(x) dx \leq \int_0^1 e^x dx \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx \leq [e^x]_0^1 \Leftrightarrow \int_0^1 f(x) dx \leq e - 1$.

On a aussi pour tout $x \in \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$, $\sin(1) \leq \sin x \leq \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow \sin(1) \leq \sin x \leq 1$, alors $e^{\sin x} \leq e$

En intégrant chaque membre entre $\left[1, \frac{\pi}{2}\right]$ on aura $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq \int_1^{\frac{\pi}{2}} e dx \Leftrightarrow \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$.

b) Puisque la droite $\Delta : x = \frac{\pi}{2}$ est un axe de symétrie de (C_f) , on a :

$$\mathcal{A} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} |f(x)| dx = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \text{ (Car } f \text{ est positive)}$$

$$= 2 \int_0^1 f(x) dx + 2 \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$$

Et comme $2 \int_0^1 f(x) dx \leq 2e - 2$ et $2 \int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e(\pi - 2)$ alors $\mathcal{A} \leq e\pi - 2$ (*)

* Montrons que $\mathcal{A} \geq \frac{\pi^2}{4} + \pi$?

On a $f(x) \geq x + 1$ pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Donc $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \geq \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + 1) dx \Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \geq \left[\frac{x^2}{2} + x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$\Leftrightarrow \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \geq \frac{\pi^2}{8} + \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \geq \frac{\pi^2}{4} + \pi \text{ d'où } \mathcal{A} \geq \frac{\pi^2}{4} + \pi (**)$$

De (*) et (**) on déduit que $\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq \mathcal{A} \leq e\pi - 2$.

