Mme KHADDAR	LYCEE PILOTE MENZAH 8	
M.LAKHDAR	BAC BLANC 2015	4M 2-3
	MATHEMATIQUES	4H

EXERCICE N1 3pts

Le prix d'équilibre d'un produit est obtenu lorsque l'offre et la demande sont égaux.

Une étude faite sur un produit a donné les résultats suivants :

Le prix au kilogramme est exprimé en dinars et les quantités pour l'offre et la demande sont exprimées en milliers de kilogrammes .

Prix proposé x_i	3	3,50	4,5	6,5	8	10
Demande y_i	6,25	4,90	3,75	2,75	2,40	2,25
Offre Z_i	1,25	1,30	1,30	1,50	1,55	1,60

1. ETUDE DE L'OFFRE : a. Calculer le coefficient de corrélation de Z en x et interpréter le résultat .

b. Donner une équation de la droite de régression de Z en X .

2. ETUDE DE LA DEMANDE

a. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de Y en X et interpréter le résultat

b. Donner une équation de la droite de régression de Y en X

c . On pose $T_i=\ln(Y_i)$. Calculer le coefficient de corrélation de T en X .

d. Déterminer une équation de la droite de régression de T en X en déduire l'expression de Y en fonction de X

3. ETUDE DU PRIX D'EQUILIBRE

On a représenté en dessous les deux courbes des fonctions f et g définies sur [0 , 20] par :
$f(x)=e^{-0,14x+2,08}$ et $g(x)=0,053x+1,1$

a. Montrer que l' équation $f(x)=g(x)$ admet une solution unique x_0 .(Sans utiliser le graphique)

b. En utilisant le graphique donner une valeur approchée du prix d'équilibre de ce produit .

EXERCICE N2 6pts

1.a. Résoudre l'équation différentielle (E) : $y'=y$.

b. Déterminer la solution particulière g de l'équation (E) qui vérifie g(0)=1 .

c. Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(\frac{1}{x})=\sqrt{x}.g^{-1}(x)$ ou g^{-1} la fonction réciproque de g . Expliciter $f(x)$ .pour $x\in]0,+\infty[$.

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=-\dfrac{\ln(x)}{\sqrt{x}}$.

2. Montrer que pour tout réel $x\in]0,+\infty[$ on a $f'(x)=\dfrac{\ln(x)-2}{2x\sqrt{x}}$ puis dresser le tableau de variation de f .

3. Pour tout entier naturel non nul n on pose : $g_n(x)=\mathrm{f(x)}-\mathrm{x}^n$.

   a. Montrer que g_n est une fonction décroissante sur $]0,1[$.

   b. Déduire que pour tout entier naturel non nul n il existe un unique réel $\alpha_n\in]0,1[$ tel que

   $f(\alpha_n)=(\alpha_n)^n$.

   c. Montrer que Pour tout entier naturel non nul n on a : $g_n(\alpha_{n+1})\prec 0$.

   d. Déduire que la suite (α_n) est croissante et convergente .

4. Posons $L=\lim\limits_{n\to\infty}\alpha_n$.

   a. Vérifier que : $0\prec\alpha_1\le L\le 1$.

   b. Soit h la fonction définie sur $]0,1[$ par $h(x)=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\ln(-\ln(x))}{\ln(x)}$.

Vérifier que $h(\alpha_n)=n$.

   c. Déterminer $\lim\limits_{x\to1^-}h(x)$ et $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)$ puis montrer que : L = 1 .

   d. Déduire que : $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n)^n=0$.

5. Pour tout entier naturel non nul n on pose : $U_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(\frac{k}{n})$.

a. Montrer que : $\frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x)dx \leq \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$. avec $k \in \{1;......;n-1\}$

b. Montrer que pour tout entier naturel non nul n on a :

$$\int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt \leq U_n \leq \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) + \int_{\frac{1}{n}}^{1} f(t)dt$$

c. Déduire que : $\lim_{n \to \infty} U_n = 4$.

EXERCICE N3 4pts

Une entreprise fabrique des puces électroniques qui sont utilisées pour des matériels aussi différents que des téléphones portables , des lave-linge ou des automobiles .

A la sortie de fabrication **5%** d'entre elles présente un défaut et sont donc éliminées . Les puces restantes sont livrées au clients .

On dit qu'une puce a une durée de vie courte si cette durée de vie est inférieure ou égale a 1000 heures . On observe que **2%** des puces livrées ont une durées de vie courte .

On note L l'événement << La puce est livrée >>

On note C l'événement << La puce a une durée de vie courte c'est-a-dire inférieur ou égale à 1000 heures >>

1. On tire au hasard une puce fabriquée par l'entreprise .

a. Donner la valeur de P (C / L) .

b. Quelle est la probabilité que la puce soit livrée et ait une durée de vie strictement supérieur à 1000 heures ?

c. Quelle est la probabilité que la puce soit éliminée ou ait une durée de vie courte à la sortie de la chaine de fabrication ?

d. Déterminer P (L / C) .

Dans la suite de l'exercice on s'intéresse seulement aux puces livrées aux clients

2. On appelle X la variable aléatoire correspondant à la durée de vie en heures d'une telle puce .

On suppose que X suit une loi exponentielle de paramètres λ .

a. Montrer que $\lambda = \frac{-\ln(0,98)}{1000} \approx 2,02.x10^{-5}$.

b. Calculer la probabilité qu'une puce ait une durée de vie supérieure à 1000 heure . On arrondira le résultat a 10^{-3} près .

c. Calculer $P(20000 \leq X \leq 30000)$. On arrondira le résultat a 10^{-3} près . Interpréter ce résultat .

3. Les ingénieur de l'entreprise Ont mis au point un nouveau procédé de fabrication . On suppose qu'avec ce nouveau procédé la probabilité qu'une puce livrée donnée ait une durée de vie courte est égale à 0,OO3 .

Soit n un entier naturel non nul , on prélève au hasard n puces prête à être livrées . On admettra que ce prélèvement de n puces revient à effectuer un tirage avec remise de n puces parmi l'ensemble de toutes les puces électroniques produites par l'entreprise et prêtes à être livrées .

On appelle Y la variable aléatoire égale au nombre de puce ayant une vie courte dans cet échantillon .

a. Dans cette question on prend <u>n = 1500</u> : Calculer la probabilité d'avoir 40 pièces ayant une durée de vie courte .

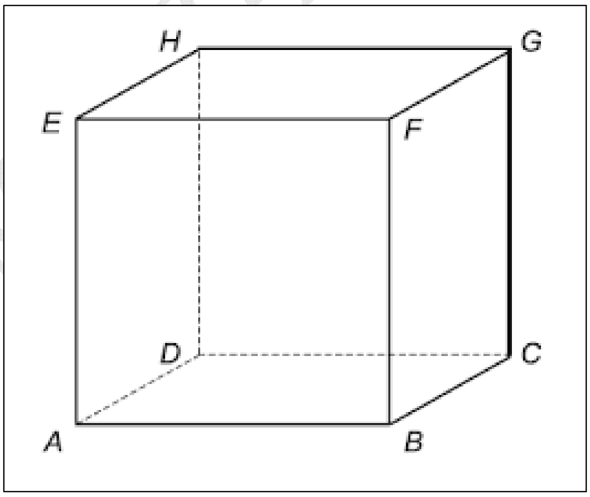
b. Déterminer la plus petite valeur de n pour que la probabilité qu'au moins une puce ait une durée de vie courte soit supérieure ou égale à 0,99 .

EXERCICE N4 5pts

La figure ci-contre représente un cube ABCDEFGH d'arête 1

Munit d'un repère orthonormé directe $(A,\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AE})$

On désigne par I le milieu du segment [AD]



1.a. Déterminer une équation cartésienne du plan (BIG) .

b. Calculer le volume du tétraèdre BIGE et en déduire le volume V' du tétraèdre image de BIGE par l'homothétie de centre I et de rapport (-1/3) .

Soit S la sphère de centre E et de rayon 1 et $S'=t_{\overrightarrow{AC}}(S)$

2. a. Montrer que S est tangente au plan (BIG) au point $K\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right)$.

b. Montrer que S' coupe le plan (BIG) suivant un cercle C dont ont précisera le centre et le rayon R .

c. Montrer que (KB) est tangente à C en K .

3. Soit Δ l'ensemble des points M de l'espace tel que : $\overrightarrow{KB}\wedge\overrightarrow{KM}=\overrightarrow{KE}$.

a. Montrer que Δ est une droite en lui donnant une représentation paramétrique .

b. Si M un point de coordonnées $(3-2\alpha,-1+2\alpha,\alpha)$ avec $\alpha\in IR$ montrer alors :

$$\left(\overrightarrow{BD}\wedge\overrightarrow{BG}\right).\overrightarrow{BM}=1-\alpha$$

c. Pour $\alpha\neq 1$ Déterminer les positions de M pour les quelles le volume du tétraèdre BGDM soit le 1/3 du cube ABCDEFGH .

4. Soit $N\left(\cos(2x-\frac{\pi}{4})\ ;\ 1\ ;\ 0\right)$ ou $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

Pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. , on considère la fonction f définie sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$ par $f(x)=d\left(N,(EH)\right)$

(la distance du point N à la droite (EH)) .

a. Vérifier que , pour tout $x\in\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$. ; on a $f(x)=\sqrt{1+\cos^2(2x-\frac{\pi}{4})}$.

b. Dresser le tableau de variation de f sur $\left[0;\frac{\pi}{4}\right]$.

c. En déduire la valeur de x pour la quelle la distance $d\left(N,(EH)\right)$ est maximale .

EXERCICE N 5 2pts

Répondre par vrai ou faux en justifiant .

1. la fonction f définie sur IR par : $f\left(x\right)=3^{2x-1}$ est une solution de l'équation différentielle :

$$y'+y\ln(\frac{1}{9})=0\ .$$

2 .Le choix d'un réel de l'intervalle $\left[-2,4\right]$ se fait suivant la loi uniforme .

Soit $C:\alpha x^2+\beta y^2=1$ avec $\alpha;\beta\in\left[-2;4\right]$ dans un repère orthonormé . La probabilité que C soit une hyperbole est $\frac{4}{9}$

3. L'unique solution de l'équation différentielle $y''+36y=0$ qui vérifie : $f(0)=\sqrt{3}$ et $f'\left(0\right)=6$

est la fonction définie sur IR par $f(x)=3\sin(6x+\frac{\pi}{6})$.

4. Soit la fonction f définie sur IR par : $f\left(x\right)=2^x$ et $\overline{f}$ sa valeur moyenne sur $\left[1,2\right]$ on alors :

$$\overline{f}=\frac{1}{\ln(2)}$$