DEVOIR DE SYNTHÈSE N° 3 — 4ème MATH

MATHÉMATIQUES : DURÉE 4H — MAI 2014

Pr : BEN FREDJ SOFIANE

Exercice 1. (4 points) Une étude sur la durée du service à la casse d'un supermarché d'alimentation a donné les résultats ci dessous :

t	0	120	240	360	480
p	0	0,33	0,50	0,66	0,75

p est la proportion de clients servis en une durée inférieure à t (en secondes).

1. On pose $q = -\ell n\,(1-p)$. On donne dans la figure jointe (voir figure 1 feuille annexe page 4) le nuage de point de la série statistique (t, q).
   (a) On admettra que la droite de régression (D) de q en t passe par le point de coordonnées $(0, 0)$. Construire D.
   (b) Montrer qu'une équation de (D) est donnée par : $q = 0,003t$.
   (c) Déduire que la variable aléatoire X égale à la durée du service est distribuée à l'aide d'une loi exponentielle que l'on précisera la valeur de son paramètre λ.
2. On admet qu'on peut prendre $\lambda = 0,003$
   (a) Montrer que la probabilité qu' un client n'a pas été servi au cours des trois premières minutes est égale à $0,58$.
   (b) Un client n'a pas été servi au cours des trois premières minutes. Quelle est la probabilité qu'il le soit pendant la minute suivante.

Exercice 2. (4 points).

On rapport l'espace à un repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k})$ et on donne $B(0,1,0), C(1,1,0)$ et $D(3,2,2)$, et soit M est un point de la droite Δ passant par A et parallèle à la droite (BC).

1. (a) Montrer que les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.
   (b) Montrer que le volume du tétraèdre $ABCD$ est égale à $\dfrac{1}{3}$.

(c) Montrer que les tétraètres **DABC** et **DMBC** ont le même volume.

2. Pour tout réel α de l'intervalle $]0,1[$, on considère le point **E** de coordonnées $(2\alpha+1, \alpha+1, 2\alpha)$. Le plan passant par **E** et parallèle au plan (**MBC**) coupe les segments [**DB**] et [**MD**] respectivement en **F** et **N**.

   (a) Vérifier que $\overrightarrow{DE} = (1-\alpha)\overrightarrow{DC}$.

   (b) Montrer que le volume $\mathscr{V}_\alpha$ du tétraèdre **DEFN** est égal à $\dfrac{(1-\alpha)^3}{3}$.

   (c) Pour calculer $\mathscr{V}_\alpha$, on choisit au hasard une valeur de α dans $]0,1[$ (On suppose que les valeurs de α sont uniformément réparties dans cet intervalle). Calculer la probabilité pour que l'on ait : $\dfrac{1}{81} < \mathscr{V}_\alpha < \dfrac{1}{24}$

Exercice $\boxed{3}$. (5 points)

1. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, on considère l'ellipse $\mathscr{E}$ d'équation réduite

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

   Préciser les sommets et l'excentricité de $\mathscr{E}$.

2. On considère dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ deux cercles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ de même centre **O** et de rayons respectifs **5** et **3**. Pour tout point **N** de $\mathscr{C}$, on considère le point **K** le point d'intersection de la demi-droite [**ON**) et le cercle $\mathscr{C}'$.

   La parallèle à $(O, \vec{j})$ et passant par **N** coupe la parallèle à $(O; \vec{i})$ et passant par **K** en M_0. Soit θ une mesure en radian de l'angle $(\widehat{\vec{i}, \overrightarrow{ON}})$.

   (a) Montrer que $(5\cos\theta, 3\sin\theta)$ sont les coordonnées du point M_0 dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ puis déduire que lorsque **N** varie sur $\mathscr{C}$, le point M_0 décrit une ellipse $\mathscr{E}$.

   (b) Soit **T** la droite dont une équation cartésienne est : $3x\cos\theta + 5y\sin\theta = 15$ Montrer que **T** est tangente à $\mathscr{E}$ en M_0.

   (c) La parallèle à $(O, \vec{j})$ passant par **K** rencontre la parallèle à $(O, \vec{i})$ passant par **N** en un point **P**.

      i. Montrer que la droite (**OP**) est perpendiculaire à **T**.

      ii. Placer **P** puis construire **T**.

   (d) Construire $\mathscr{E}$.

Exercice $\boxed{4}$. (7 points) n étant un entier naturel non nul.

1. Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $a_n(x) = \int_0^x e^{-nt}dt$.

   (a) Montrer que $a_n(x) = \frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{n}$.

   (b) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} a_n(x) = \frac{1}{n}$.

2. (a) Montrer que pour tout réel $u \geq 0$, $1 - u \leq \frac{1}{1+u} \leq 1 \quad (1)$

   (b) Déduire que pour tout réel $u \geq 0$, $u - \frac{u^2}{2} \leq \ell n\,(1+u) \leq u \quad (2)$

3. On considère la fonction F_n définie sur $[0, +\infty[$ par :

$$F_n(x) = \int_0^x e^{-t} \ell n\,(1 + e^{-nt})dt$$

   (a) Montrer que F_n est croissante sur $[0, +\infty[$.

   (b) Montrer que pour tout réel $x \geq 0$,

$$a_{n+1}(x) - \frac{a_{2n+1}(x)}{2} \leq F_n(x) \leq a_{n+1}(x)$$

   On pourra utiliser (2).

   (c) Montrer que $F_n(x)$ possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. On note par la suite $U_n = \lim\limits_{x \to +\infty} F_n(x)$.

   (d) Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{4n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

   puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n$.

4. Pour tout réel $x \geq 0$, on pose $G_n(x) = \int_0^x \frac{e^{-t}}{1+e^{nt}}dt$.

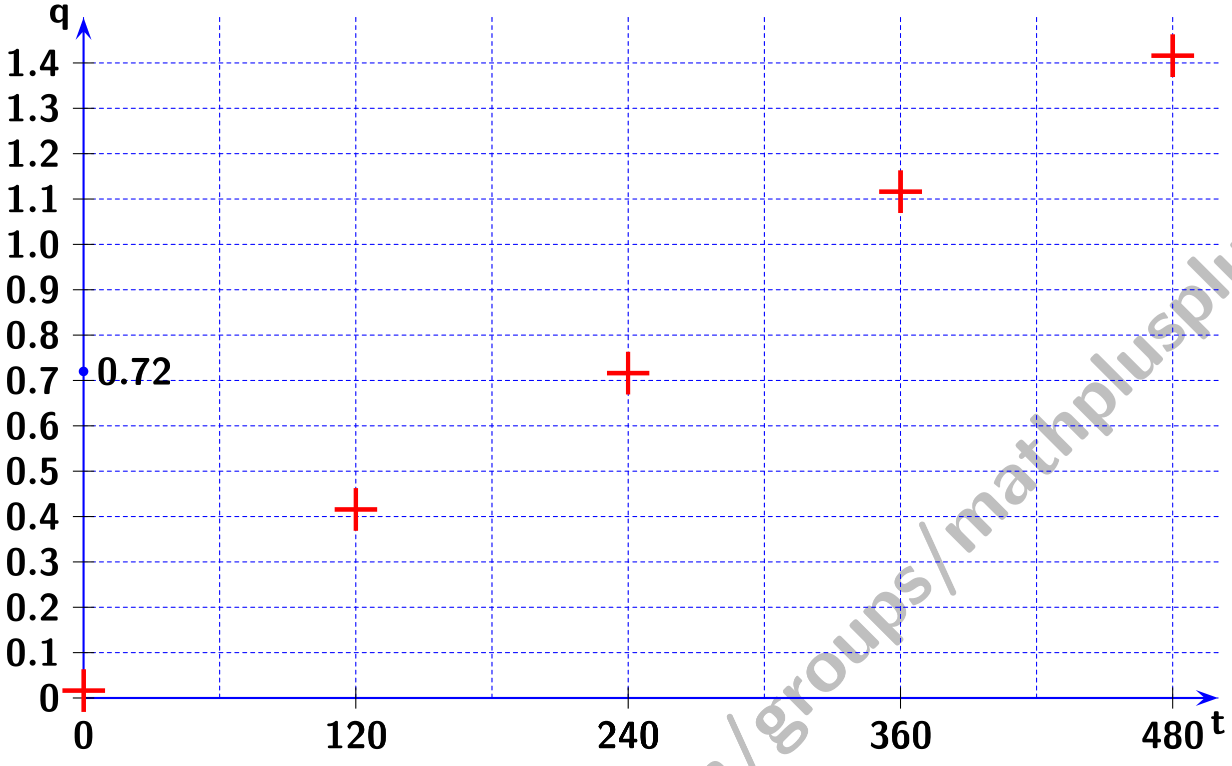
   (a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que :

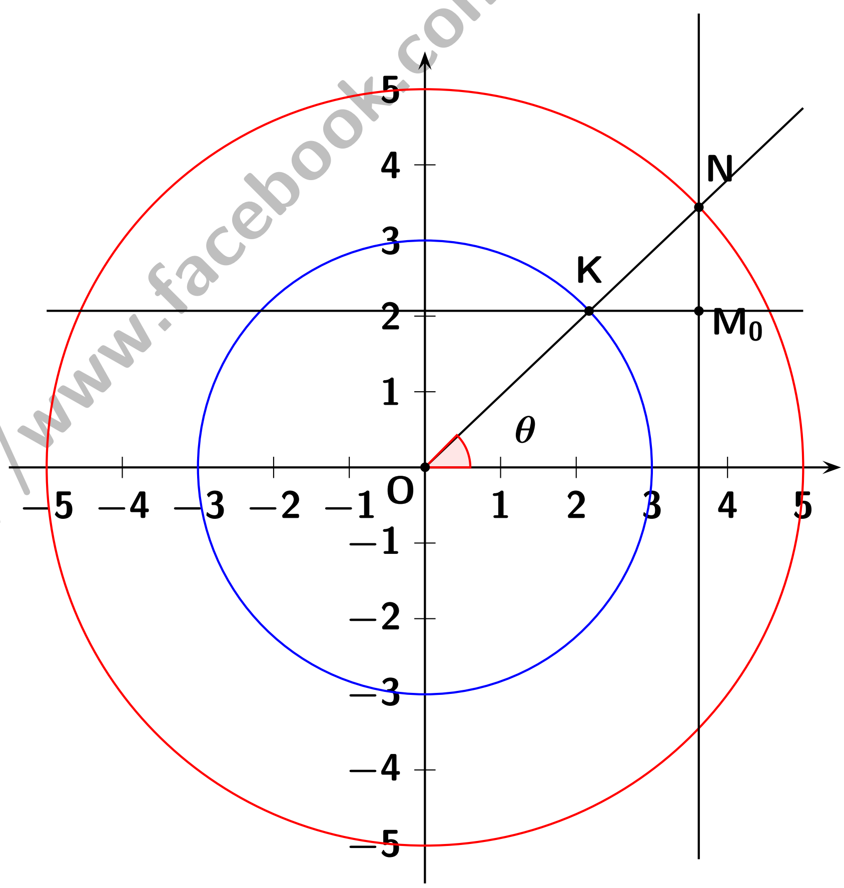
$$F_n(x) = \ell n\,2 - e^{-x}\ell n\,(1 + e^{-nx}) - nG_n(x)$$

   (b) Déduire que $G_n(x)$ possède une limite finie V_n lorsque x tend vers $+\infty$.

   (c) Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} nV_n = \ell n\,2$.

FEUILLE ANNEXE À RENDRE

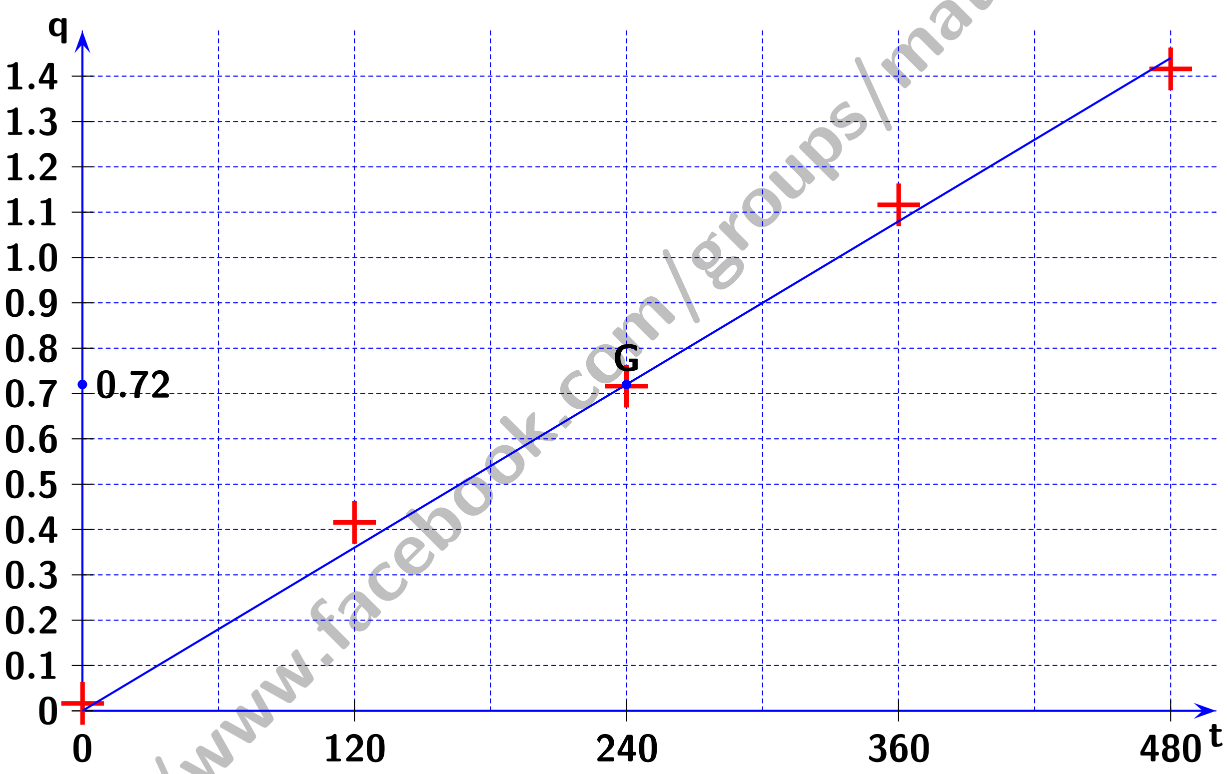




Solution 1. .

1. (a) (D) passe par l'origine du repère et par le point moyen $G(\overline{t}, \overline{q})$ où $\overline{t} = 240$ et $\overline{q} = 0.72$.

   (b) La droite (D) est d'équation $q = \dfrac{\overline{q}}{\overline{t}} \times t = 0.003t$.



   (c) Comme $q = -\ell n\,(1 - p)$ alors $p = 1 - e^{-q}$ d'où
   $$p(t) = 1 - e^{-0.003t}.$$
   $p(t)$ est la proportion de clients servis en une durée X inférieure à t d'où $p(t) = P(X \leq t)$.

   comme $P(X \leq t) = 1 - e^{-0.003t} = \displaystyle\int_0^t 0.003e^{-0.003t}dt$ alors X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0.003$.

2. (a) La probabilité cherchée est celle de l'événement :
   $$\text{“}X \geq 180\text{”, soit } P(X \geq 180) = e^{-0.003 \times 180} = 0.58.$$

(b) La probabilité cherchée est la probabilité conditionnelle de l'événement "$X \leq 240$" sachant l'événement "$X \geq 180$", soit :

$$\begin{aligned} P(X \leq 240 | X \geq 180) &= \frac{P((X \leq 240) \cap (X \geq 180))}{P(X \geq 180)} \\ &= \frac{P(180 \leq X \leq 240)}{P(X \geq 180)} \\ &= \frac{e^{-180\lambda} - e^{-240\lambda}}{e^{-180\lambda}} = 1 - e^{-60\lambda} \\ &= 1 - e^{-60\times 0.003} = 0.16 \end{aligned}$$

Solution 2. .

1. (a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ d'ou $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}$

   d'où $\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right) = -2 \neq 0$ donc les points A, B, C et D ne sont pas coplanaires.

   (b) On note $\mathscr{V}$ le volume du tétraèdre **ABCD**.

$$\begin{aligned} \mathscr{V} &= \frac{\left|\overrightarrow{AD}.\left(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\right)\right|}{6} = \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

   (c) M, A, B et C sont coplanaires et (AM) et (BC) sont parallèles alors les triangles **MBC** et **ABC** ont la même aire d'autre part les tétraèdres **DABC** et **DMBC** ont la même hauteurs issue en **D** et par la suite ils ont le même volume.

2. (a)

$$\overrightarrow{DE}\begin{pmatrix} 2\alpha+1-3 \\ \alpha+1-2 \\ 2\alpha-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2(\alpha-1) \\ \alpha-1 \\ 2(\alpha-1) \end{pmatrix}$$
$$= (1-\alpha)\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$$
$$= (1-\alpha)\,\overrightarrow{DC}$$

(b) On a aussitôt $h(C) = E$.

i. L'image du plan (BCM) est un plan qui lui est parallèle et passant par $h(C) = E$ alors l'image du plan (BCM) est le plan (FEN).
L'image d'une droite passant par D par h est une droite globalement invariante par h et comme M appartient à l'intersection du plan (BCM) et la droite (DM) alors $h(M) = N$ de même on aura $h(B) = F$

ii. L'image du tétraèdre $DBCM$ par h est le tétraèdre $DFEN$ (l'image de quatre points non coplanaires par une homothétie sont quatre points non coplanaires) et comme $1-\alpha > 0$ alors :

$$\mathscr{V}_\alpha = (1-\alpha)^3 \times \mathscr{V} = \frac{(1-\alpha)^3}{3}$$

(c) α étant dans $]0,1[$.

$$\frac{1}{81} < \mathscr{V}_\alpha < \frac{1}{24} \iff \frac{1}{27} < (1-\alpha)^3 < \frac{1}{8}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} < \alpha < \frac{2}{3}$$

La probabilité cherchée est $P\left(\left[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}\right]\right) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$

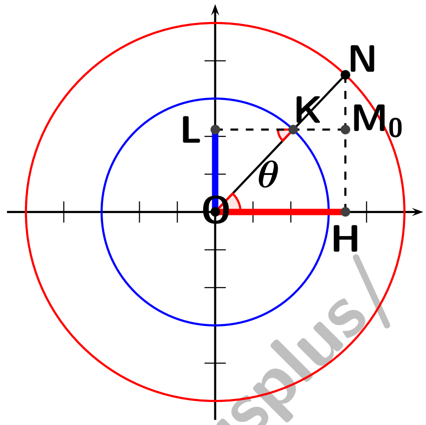
Solution 3. 1. On note $a = 5$ et $b = 3$. Comme $a > b$ alors l'axe focal de $\mathscr{E}$ est la droite $(O; \overrightarrow{i})$.

- les sommets principaux sont $A(5,0)$ et $A'(-5,0)$
- les sommets secondaires sont $B(0,3)$ et $B'(0,-3)$
- d'excentricité $e = \dfrac{\sqrt{5^2-3^2}}{5} = \dfrac{4}{5}$.

2. (a) On note :

- $\mathbf{H}$ est le projeté orthogonal de $\mathbf{M_0}$ sur l'axe des abscisses;
- $\mathbf{L}$ est le projeté orthogonal de $\mathbf{M_0}$ sur l'axe des ordonnées;
- $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ les coordonnées de $\mathbf{M_0}$ dans $(\mathbf{O}; \overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}})$

Alors $\begin{cases} \mathbf{x} = \mathbf{OH} = 5\cos\theta \\ \mathbf{y} = \mathbf{OL} = 3\sin\theta \end{cases}$



Comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ d'où $\left(\frac{\mathbf{x}}{5}\right)^2 + \left(\frac{\mathbf{y}}{3}\right)^2 = 1$ et par la suite $\mathbf{M}$ appartient à $\mathscr{E}$.

(b) Une équation de $\mathbf{T}$ est :

$$\frac{\mathbf{x} \times 5\cos\theta}{25} + \frac{\mathbf{y} \times 3\sin\theta}{9} = 1 \iff 3\mathbf{x}\cos\theta + 5\mathbf{y}\sin\theta = 15$$

(c) .

i. On note

- $\mathbf{E}$ est le projeté orthogonal de $\mathbf{P}$ sur l'axe des abscisses;
- $\mathbf{F}$ est le projeté orthogonal de $\mathbf{P}$ sur l'axe des ordonnées;
- $(\mathbf{x_P}, \mathbf{y_P})$ les coordonnées de $\mathbf{P}$ dans $(\mathbf{O}; \overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}})$

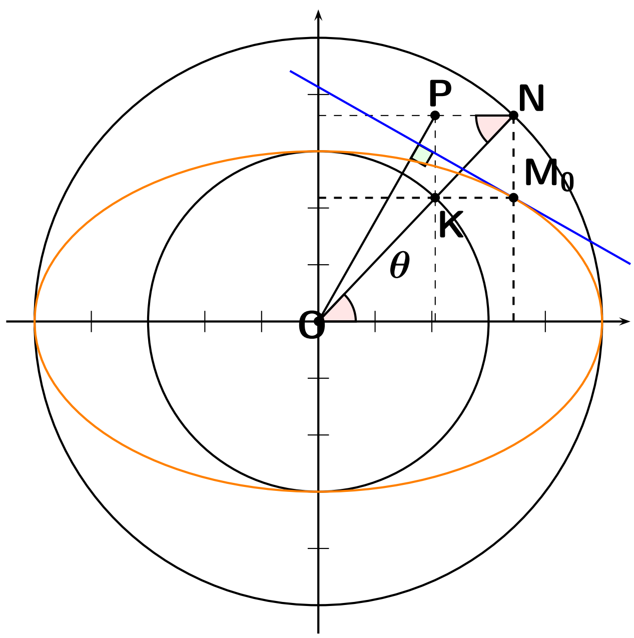
Alors $\mathbf{x_P} = \mathbf{OK}\cos\theta = 3\cos\theta$ et $\mathbf{y_P} = \mathbf{ON}\sin\theta = 5\sin\theta$ d'où $\overrightarrow{\mathbf{OP}}\begin{pmatrix} 3\cos\theta \\ 5\sin\theta \end{pmatrix}$

Un vecteur directeur de $\mathbf{T}$ est $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}}\begin{pmatrix} -5\sin\theta \\ 3\cos\theta \end{pmatrix}$

comme $\overrightarrow{\mathbf{u}}_{\mathbf{T}}.\overrightarrow{\mathbf{OP}} = \mathbf{0}$ alors $(\mathbf{OP})$ est perpendiculaire à $\mathbf{T}$.

ii. Voir figure.

(d) .



Solution **4.** .

1. $\mathbf{n}$ étant un entier tel que $\mathbf{n} \geq \mathbf{1}$ et $\mathbf{x}$ est un réel.

   (a) $\displaystyle\int_0^x e^{-nt}dt = \left[-\frac{e^{-nt}}{n}\right]_0^x = \frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{n}.$

   (b) $\mathbf{n}$ étant fixé.

   $$\lim_{x \to +\infty} a_n(x) = \lim_{x \to +\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{e^{-nx}}{n}\right) = \frac{1}{n} \text{ puisque } \lim_{x \to +\infty} e^{-nx} = 0.$$

2. (a) $\mathbf{u}$ étant un réel positif. nous avons :

   - $1 - \dfrac{1}{1+u} = \dfrac{u}{1+u}$ d'où si $u \geq 0$ alors $1 - \dfrac{1}{1+u} \geq 0$.
   - $1 - u - \dfrac{1}{1+u} = \dfrac{-u^2}{1+u}$ d'où , si $u \geq 0$ alors $1 - u - \dfrac{1}{1+u} \leq 0$

   (b) Pour tout réel $u \geq 0$, on a :

   - $\displaystyle\int_0^u dt = u,$
   - $\displaystyle\int_0^u (1-t)dt = u - \frac{u^2}{2}$, et
   - $\displaystyle\int_0^u \frac{dt}{1+t} = \Big[\ell n\,(1+t)\Big]_0^u = \ell n\,(1+u)$

   Donc $$u - \frac{u^2}{2} \leq \ell n\,(1+u) \leq u.$$

3. (a)
   - F_n est la primitive qui s'annule en $\mathbf{0}$ de la fonction $t \mapsto e^{-t}\ell n\,(1+e^{-nt})$.
   - La fonction $t \mapsto e^{-t}\ell n\,(1+e^{-nt})$ est continue et positive sur $[0, +\infty[$ (puisque $1 + e^{-nt} > 1$ d'où $\ell n\,(1+e^{-nt}) \geq 0$) donc F_n est croissante sur $[0, +\infty[$.

   (b) D'après (2) en posant $u = e^{-nt}$ puis en multipliant par e^{-t} alors :

   $$e^{-(n+1)t} - \frac{e^{-2(n+1)t}}{2} \leq e^{-t}\ell n\,(1+e^{-nt}) \leq e^{-(n+1)t}.$$

   d'où pour tout $x \geq 0$

   $$\int_0^x e^{-(n+1)t}dt - \int_0^x \frac{e^{-2(n+1)t}}{2}dt \leq \int_0^x e^{-t}\ell n\,(1+e^{-nt})dt \leq \int_0^x e^{-(n+1)t}dt.$$

   donc $$a_{n+1}(x) - \frac{a_{2n+1}(x)}{2} \leq F_n(x) \leq a_{n+1}(x)$$

(c) On a :

- Pour tout réel $x \geq 0$, $a_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{e^{-(n+1)x}}{n+1}$ d'où pour tout $x \geq 0$, $a_{n+1}(x) \leq \dfrac{1}{n+1}$.
- D'où pour tout réel $x \geq 0$, $F_n(x) \leq \dfrac{1}{n+1}$ d'où $F_n(x)$ est majorée par $\dfrac{1}{n+1}$ sur $[0, +\infty[$.

F_n est croissante et majorée sur l'intervalle $[0, +\infty[$ alors elle possède une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$.

(d) On a :

- $\lim\limits_{x\to+\infty} F_n(x) = U_n$
- $\lim\limits_{n\to+\infty} a_{n+1}(x) = \dfrac{1}{n+1}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} a_{2n+1}(x) = \dfrac{1}{2n+1}$
- pour tout $x \geq 0$, $a_{n+1}(x) - \dfrac{a_{2n+1}(x)}{2} \leq F_n(x) \leq a_{n+1}(x)$

Donc
$$\frac{1}{n+1} - \frac{1}{4n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{4n+2} = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$

4. (a) Pour tout réel $x \geq 0$, on a : $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x e^{-t}\ln(1 + e^{-nt})dt$.

On pose $u'(t) = e^{-t}$ et $v(t) = \ln(1 + e^{-nt})$, soit $u(t) = -e^{-t}$ et $v'(t) = -n\dfrac{e^{-nt}}{1 + e^{-nt}} = \dfrac{-n}{1 + e^{nt}}$

Le théorème d'intégration par parties permet :
$$F_n(x) = \Big[- e^{-t}\ln(1 + e^{-nt}) \Big]_0^x - n\int_0^x \frac{e^{-t}}{1 + e^{nt}}dt$$
d'où
$$F_n(x) = \ln 2 - e^{-x}\ln(1 + e^{-nx}) + n \times G_n(x).$$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x}\ln(1 + e^{-nx}) = 0 \times \ln 1 = 0$ et $F_n(x)$ admet une limite finie égale à U_n lorsque x tend vers $+\infty$ d'où $G_n(x)$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$ égale à V_n qui vérifie $U_n = \ln 2 - nV_n$.

(c) Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 0$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} nV_n = \ln 2$.