DEVOIR DE CONTRÔLE # 3 — $4^{\text{ème}}$ MATH

MATHÉMATIQUES : DURÉE 2H — AVRIL 2015

Pr : BEN FREDJ SOFIANE

Exercice $\boxed{1}$. **(4 points)** Dans le plan orienté, on considère un carré **ABCD** de centre **O** tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} (\mathrm{mod}\ 2\pi)$. On désigne par **I, J** les milieux respectifs des segments [**AB**] et [**BC**]. Soit **s** la similitude directe telle que $s(A) = B$ et $s(D) = I$.

1. Déterminer l'angle de **s**, puis construire son centre Ω.

2. **a.** Déterminer les images des droites (**AC**) et (**CD**) par **s**.

b. En déduire que triangle $O\Omega C$ est rectangle.

3. Déterminer l'image du carré **ABCD** par **s**.

4. Montrer que A, Ω et **J** sont alignés.

Exercice $\boxed{2}$. **(4 points)** Lors d'un concours d'équitation, un cavaler effectue un parcours de **1500**m à la vitesse de **10**km.h^{-1} et franchit sur ce parcours six obstacles indépendamment. Pour ce cavalier, la probabilité de franchir « sans faute » un obstacle est $\frac{2}{3}$; le passage sans faute d'un obstacle ne ralenti pas le cavalier, tandis qu'un passage avec faute lui fait perdre une minute.

1. On considère les événements :

- **A** : « Le cavalier commet sa première faute au quatrième obstacle »
- **B** : « Le cavalier franchit au moins un obstacle sans fautes »

Les probabilités seront données sous forme des fractions irréductibles.

(a) Calculer $p(A)$ et $p(B)$.

(b) Le cavalier franchit au moins un obstacle sans fautes. Qu'elle est la probabilité pour qu'il commette sa première faute au quatrième obstacle.

2. Soit **X** l'aléa numérique qui prend pour valeur le nombre d'obstacles franchis sans faute.

(a) Donner la loi de probabilité de **X**.

(b) Déduire la durée moyenne du parcours.

Exercice $\boxed{3}$. (6 points) . Pour tout entier k, on note $a = 3k + 2$ et $b = 4k + 1$.

1. Montrer que : $a \wedge b = 5$ si et seulement si $k \equiv 1 \pmod 5$

2. On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation $(E) : 5x - 16y = 12$.
   Montrer que les solutions de (E) sont de la forme $(16K - 4, 5K - 2)$ où K est un entier relatif.

3. N étant un entier naturel. Montrer que :

$$\begin{cases} N \equiv 13 \pmod{16} \\ N \equiv 1 \pmod 5 \end{cases} \text{ si et seulement si } N \equiv 61 \pmod{80}$$

4. **a.** Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $5u \equiv 1 \pmod{16}$. (On remarquera que 13 est une solution particulière de cette congruence)

   b. Déterminer l'ensemble des entiers k tels que : $\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ b^2 \equiv a \pmod{16} \end{cases}$

Exercice $\boxed{4}$. (6 points) . n étant un entier naturel non nul.

1. Soit f la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $f(x) = 1 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ell n^2 x}{2x}$.

   a. Montrer que le signe de $f'(x)$ est celui de l'expression $-\ell n^2 x + 2\ell n\, x + 2$.

   b. On donne le signe de $-\ell n^2 x + 2\ell n\, x + 2$ pour $x \geq 1$.

x	1		$e^{1+\sqrt{3}}$		$+\infty$
$-\ell n^2 x + 2\ell n\, x + 2$		$+$	0	$-$	

   Étudier les variations de f.

2. Soit d la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $d(x) = e^x - \dfrac{x}{n}$.

   a. Montrer que d possède un minimum strictement positif d_n sur $\mathbb{R}$.

   b. Déduire que pour tout réel x, $d(x) > 0$.

3. On désigne par Γ la courbe représentative de la fonction exponentielle et Δ_n la droite d'équation $y = \dfrac{x}{n}$. Pour tout réel x, on note M et N deux points appartiennent respectivement de Γ et Δ_n de même abscisse x.

   a. Montrer que la distance MN est minimale si et seulement si $x = -\ell n\, n$.
   On note par la suite M_n et N_n les points de Γ et Δ_n respectivement pour lesquels MN est minimale.

   b. On note $\mathscr{A}(n)$ l'aire de la surface limitée par Γ, Δ_n, la droite (M_nN_n) et la droite des ordonnées.
   Calculer $\mathscr{A}(n)$ à l'aide de n, puis déterminer l'entier $n \geq 1$ pour lequel $\mathscr{A}(n)$ est maximale.

Solution 1. .

1. • L'angle de $\mathbf{s}$ est $(\widehat{\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BI}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2} (\bmod 2\pi)$.

   • Ω est le point d'intersection des deux arcs $\overset{\frown}{BA}$ et $\overset{\frown}{ID}$ privé respectivement des points A, B et D, I.

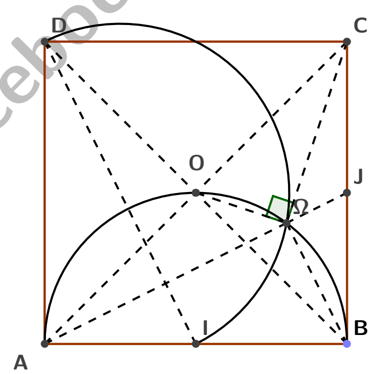
2. (a) • $s((AC))$ est la droite perpendiculaire à (AC) (l'angle de $\mathbf{s}$ est $\pi/2$) et passant par $s(A) = B$ donc $s((AC)) = (BD)$.

   • $s((CD))$ est la droite perpendiculaire à (CD) et passant par $s(D) = I$ donc $s((CD)) = (IO)$.

   (b) Comme C est point commun des deux droites (AC) et (CD) alors son image $s(C)$ est le point commun des deux droites (BD) et (IO) donc $s(C) = O$ et par la suite $\widehat{C\Omega O} = \pi/2$ et par la suite $O\Omega C$ est rectangle en Ω.

3. L'image du carré $ABCD$ est un carré direct et comme $s(A) = B, s(C) = O$ et $s(D) = I$ et le carré $BJOI$ est direct alors l'image du carré $ABCD$ est le carré $BJOI$.

4. Comme $s(\{A, B, C, D\}) = \{B, J, O, I\}$ et $s(A) = B, s(C) = O, s(D) = I$ d'où $s(B) = J$.
   Donc $s \circ s(A) = J$ et l'angle de $s \circ s$ est π d'où A, Ω et J sont alignés.



Solution 2. .

1. On note S_i le i ème obstacle est franchit sans faute où $1 \leq i \leq 6$. Alors S_i sont indépendants et ont même probabilité $p(S) = 2/3$(de même pour $\overline{S_i}$) on note ainsi $S_i = S$ et $\overline{S_i} = \overline{S}$ et $p(\overline{S}) = 1/3$.

   (a) • L'évènement A peut se traduire par : $A = S \cap S \cap S \cap \overline{S} \cap (S \cup \overline{S}) \cap (S \cup \overline{S})$

   d'où $p(A) = \left(\frac{2}{3}\right)^3 \times \frac{1}{3} = \frac{8}{81}$.

- On a $\overline{B}$: « Le cavalier commet six fautes » alors : $p(B) = 1 - p(\overline{B}) = 1 - \frac{1}{3^6} = \frac{728}{729}$

(b) La probabilité cherchée est $p(A|B)$.

On remarque que $A \subset B$ d'où $A \cap B = A$ d'où $p(A|B) = \frac{p(A)}{p(B)} = \frac{9}{91}$.

2. (a) X suit une loi binomiale de paramètre $p = 2/3$ et $n = 6$. La loi de X est donnée par :

$$k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \text{ et } p(X = k) = C_6^k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{6-k}$$

(b) $E(X) = n \times p = 3$ c'est le nombre moyen des obstacles franchis sans fautes.

D'autre part la durée maximale du parcours est $\frac{1.5}{10} = 0.15h = 9mn$ d'où la durée moyenne du parcours en minutes est $9 - 3 = 6$.

Solution 3. .

1. - Supposant que $a \wedge b = 5$ montrons que $k \equiv 1 \pmod 5$.
   Si $a \wedge b = 5$ alors $5|3k + 2$ et $5|4k + 1$ alors $5|(4k + 1) - (3k + 2)$ d'où $5|k - 1$ donc $k \equiv 1 \pmod 5$.
   - Réciproquement : Si $k \equiv 1 \pmod 5$ alors il existe un entier q tel que $k = 5q + 1$ d'où $a = 5(3q + 1)$ et $b = 5(4q + 1)$ et par ailleurs $3(4q + 1) - 4(3q + 1) = -1$ d'où (D'après l'identité de Bézout) $(3q + 1) \wedge (4q + 1) = 1$ donc $a \wedge b = 5$.

2. - Vérification : Pour tout entier k, $5(16K - 4) - 16(5K - 2) = -20 + 32 = 12$
   - Réciproquement : $5x - 16y = 12$ signifie $5(x + 4) = 16(y + 2)$ et comme $16 \wedge 5 = 1$ (puisque $16 = 3 \times 5 + 1$ d'où $16 - 3 \times 5 = 1$) alors d'après le lemme de Gauss, 16 divise $x + 4$ alors il existe un entier k tel que $x + 4 = 16k$ donc $x = 16k - 4$ où $k \in \mathbb{Z}$; d'où $5 \times 16k = 16(y + 2)$ d'où $y + 2 = 5k$ donc $y = 5k - 2$ où $k \in \mathbb{Z}$.

3. - C.N. il existe deux entiers x et y tels que $N = 16y + 13 = 5x + 1$ d'où $5x - 16y = 12$ d'où $x = 16k - 4$ et $y = 5k - 2$ où $k \in \mathbb{Z}$ et par la suite $N = 5(16k - 4) + 1 = 80k - 19$ d'où $N \equiv -19 \pmod{80}$ d'où $N \equiv -19 + 80 \pmod{80}$ donc $N \equiv 61 \pmod{80}$.
   - C.S. Si $N \equiv 61 \pmod{80}$ alors il existe un entier Q tel que $N = 61 + 80Q = 61 + 5 \times 16Q$ d'où $N \equiv 61 \pmod{16}$ et $N \equiv 61 \pmod 5$ d'où $N \equiv 13 \pmod{16}$ et $N \equiv 1 \pmod 5$.

4. (a) Comme 13 est une solution particulière de cette congruence alors $5u \equiv 5 \times 13 \pmod{16}$ d'où $5(u - 13) \equiv 0 \pmod{16}$ et comme $16 \wedge 5 = 1$ (puisque $16 - 5 \times 3 = 1$) d'après le lemme de Gauss, 16 divise $u - 13$ donc $u \equiv 13 \pmod{16}$.
   Réciproquement si $u \equiv 13 \pmod{16}$ alors $5u \equiv 5 \times 13 \pmod{16}$ d'où $5u \equiv 1 \pmod{16}$.
   Donc $S_{\mathbb{Z}} = \{16t + 13; t \in \mathbb{Z}\}$.

   (b)

$$\begin{cases} a \wedge b = 5 \\ b^2 \equiv a \pmod{16} \end{cases} \iff \begin{cases} k \equiv 1 \pmod 5 \\ 5k \equiv 1 \pmod{16} \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} k \equiv 1 \pmod 5 \\ k \equiv 13 \pmod{16} \end{cases}$$
$$\iff k \equiv 61 \pmod{80}$$

Solution 4. .

1. (a) Pour tout réel $x \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{x^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \ln^2 x}{x^2}\right) \\ &= \frac{2 + \ln x - \ln^2 x}{2x^2} = \frac{-\ln^2 x + \ln x + 2}{2x^2} \end{aligned}$$

   (b) Le tableau de variations de f est :

x	1		$e^{1+\sqrt{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$f(e^{1+\sqrt{3}})$	$\searrow$	1

2. (a) Pour tout réel x, $d'(x) = e^x - \frac{1}{n}$.
   - $d'(x) = 0$ si et seulement si $x = -\ln n$.
   - Si $x \geq -\ln n$ alors $e^x - \frac{1}{n} \geq 0$ alors $d'(x) \geq 0$.
   - Si $x \leq -\ln n$ alors $e^x - \frac{1}{n} \leq 0$ alors $d'(x) \leq 0$.

   alors $d(-\ln n) = \dfrac{1 + \ln n}{n}$ est un minimum strictement positif de d sur $\mathbb{R}$.

   (b) Pour tout réel x, $d(x) \geq d(-\ln n)$ donc pour tout réel x, on a :$d(x) > 0$.

3. (a) Pour tout réel x, on a : $MN = |e^x - \frac{x}{n}| = d(x)$. Donc MN est minimale si et seulement si $x = -\ln n$.

   (b) On a : $\mathscr{A}(n) = \displaystyle\int_{-\ln n}^{0} |e^x - \frac{x}{n}| dx = \left[e^x - \frac{x^2}{2n}\right]_{-\ln n}^{0} = f(n)$.

   On a $e^{1+\sqrt{3}} \simeq 15,364$ et d'autre part $f(15) \simeq 1,1778$ et $f(16) \simeq 1,1777$ donc la valeur de n pour laquelle $f(n)$ est maximale est $n = 15$.