Nombres Complexes (série I) $4^{ème}$ Mathématiques

Dans tous les exercices le plan P complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

Soient les nombres complexes $z_1 = (1-i)(1+2i)$; $z_2 = \frac{2+6i}{3-i}$ et $z_3 = \frac{4i}{i-1}$

1) Ecrire z_1; z_2 et z_3 sous la forme algébrique.

2) Soient les points A, B et C d'affixes respectives z_1; z_2 et z_3.

Montrer que le triangle ABC est isocèle et rectangle.

3) Déterminer z_4 l'affixe du point D tel que $ABDC$ soit un carré.

Exercice 2

On considère les points A, B, C et I d'affixes respectives : $z_A = -2i$; $z_B = 1+i$; $z_C = 4+2i$ et $z_I = 2$.

1) **a)** Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) Montrer que I est le milieu de $[AC]$.

2) On désigne par D le symétrique du point B par rapport au point I.

a) Déterminer l'affixe z_D du point D.

b) Montrer que $ABCD$ est un losange.

c) $ABCD$ est-il un carré ?

3) Déterminer les ensembles suivants :$E = \left\{M(z) \in P / \left|\frac{z-1-i}{z+2i}\right| = 1\right\}$ $F = \left\{M(z) \in P / \frac{z-1-i}{z+2i} \in \mathbb{R}_+^*\right\}$

4) Déterminer et construire l'ensemble : $G = \left\{M(z) \in P / arg\left(\frac{2z+4i}{2-z}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi]\right\}$

Exercice 3

Soient les points $A(-i)$; $B(i)$ et $C(-4i)$. A tout point M d'affixe $z \neq -i$ on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{iz-4}{z+i}$

1) **a)** Montrer que si $M \neq A$ alors $OM' = \dfrac{CM}{AM}$

b) En déduire que si M' appartient au cercle trigonométrique alors le point M varie sur une droite que l'on déterminera.

2) **a)** Montrer que si $z \neq -i$ alors $(z'-i)(z+i) = -3$ et en déduire que $BM'.AM = 3$

b) Montrer alors que si le point M appartient au cercle C de centre A et de rayon 3 alors le point M' appartient à un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

3) **a)** Montrer que si $M \neq A$ alors $\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM'}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2} + \left(\widehat{\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{CM}}\right)[2\pi]$

b) En déduire que si M appartient au segment $[AC]\backslash\{A, C\}$alors M' appartient à une demi droite que l'on précisera

Exercice 4

Soient A et B les points d'affixes respectives $a = 1$ et $b = -1$.

Soit f l'application de $P\setminus\{B\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z-1}{z+1}$

1) **a)** Déterminer et construire l'ensemble Δ des points M d'affixe z tel que z' soit un réel.

b) Déterminer et construire l'ensemble Δ' des points M d'affixe z tel que z' soit un imaginaire pur.

c) Déterminer et construire l'ensemble D des points M d'affixe z tel que $|z'| = 1$.

2) **a)** Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq -1$ on a : $(z'-1)(z+1) = -2$.

b) En déduire que $AM' \times BM = 2$ et que $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$.

3) Montrer que si le point M appartient au cercle (Γ) de centre B et de rayon 2, alors le point M' appartient à un cercle (Γ') que l'on déterminera.

4) A tout point $M(z)$ on associe le point N d'affixe $-\overline{z}$.

Montrer que si le point M est distinct de B alors le point M' appartient à la demi droite $[AN)$.

5) Soit K le point d'affixe $t = -2 + i\sqrt{3}$.

a) Ecrire $t+1$ sous la forme exponentielle.

b) Montrer que le point K appartient au cercle (Γ).

6) En utilisant les questions précédentes, donner une construction du point $K' = f(K)$ et construire K'.

Exercice 5

On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3}+1)$

1) **a)** Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.

b) Déterminer l'affixe z_G du point G centre du triangle OAB.

c) Déterminer l'écriture exponentielle du complexe z_A.

2) Soit C le point du plan tel que : $OA = OC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$

a) Montrer que $|z_C| = 2$ et $arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3}\ [2\pi]$ où z_C est l'affixe du point C

b) En déduire que $z_C = 1 + i\sqrt{3}$

3) **a)** Montrer que $OACB$ est un losange.

b) $OACB$ est-il un carré ?

4) Déterminer et construire l'ensemble $E = \left\{M(z) \in P / arg\left(\frac{z-z_A}{z-z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]\right\}$

Exercice 6

On désigne par A, B et C l**es** points du plan P d'affixes respectives $2i$, -1 et i. On considère l'application f de $P/\{A\}$ vers P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \frac{z+1}{z-2i}$

1) **a)** On note par C' l'image de C par f. Quelle est la nature du quadrilatère $ACBC'$?

b) Montrer que le point C admet un unique antécédent par l'application f que l'on notera C''. Quelle est la nature du triangle BCC'' ?

2) **a)** Déterminer l'ensemble E des point M tels que z' soit un imaginaire non nul.

b) Déterminer l'ensemble F des point M tels que M' appartient au cercle de centre O et de rayon 1.

Exercice 7

On considère le point A d'affixe (-1) et les points M, N et P d'affixes respectifs z , z^2 et z^3 où z est un nombre complexe non nul différent de (-1) et de 1.

1) a) Montrer que : (Le triangle MNP est rectangle en P si et seulement si :

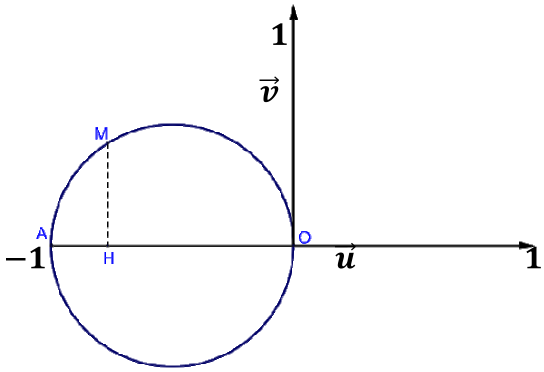
$$\left(\frac{1+z}{z} \text{ est imaginaire pur}\right)$$

b) On pose $z = x + iy$ où x et y sont des réels. Montrer que :

$$\frac{1+z}{z} = \frac{x^2 + y^2 + x - iy}{x^2 + y^2}$$

c) En déduire que l'ensemble des points M tels que le triangle MNP soit un triangle rectangle en P est le cercle (Γ) de diamètre $[OA]$, privé des points O et A.

2) Dans la figure ci-dessous on a tracé le cercle (Γ). et on a placé un point M d'affixe z sur (Γ) et son projeté orthogonal H sur l'axe $(O, \vec{u})$.



On se propose de construire les points Net P.d'affixes respectives z^2 et z^3 tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a) Montrer que : $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) [2\pi]$ puis que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON}, \overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right) [2\pi]$

b) Montrer que : $OH = OM^2$.

c) Donner un procédé de construction des points N et P puis les construire.

Exercice 8

On considère les points E et F d'affixes respectives 1 et i.

On désigne par C_1 et C_2 les cercles de centres respectifs E et F et de même rayon 1.

Soit θ un réel de l'intervalle $[0, 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i(1 + e^{i\theta})$.

1) a) Calculer $Aff(\overrightarrow{EM})$ et $Aff(\overrightarrow{FN})$.

b) Montrer que, lorsque θ varie dans $[0, 2\pi[$, M varie sur C_1 et N varie sur C_2

c) Montrer les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) Soit P le point d'affixe z_P, tel que $z_P = (1-i)\sin\theta \times e^{i\theta}$.

a) Montrer que $\frac{Aff(\overrightarrow{EP})}{Aff(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ et calculer $\frac{Aff(\overrightarrow{FP})}{Aff(\overrightarrow{FN})}$

b) Montrer que P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 9

Soient les points A et B d'affixes respectives : $a = -\sqrt{3} - i$ et $b = 1 - i\sqrt{3}$.

1) **a)** Ecrire sous forme trigonométrique a et b.

b) Représenter les points A et B.

2) On pose $z = a + b$ et on désigne par M le point d'affixe z.

a) Montrer que $OAMB$ est un carré

b) Donner la forme trigonométrique de z

c) En déduire $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

Exercice 10

Soient les nombres complexes $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 == -\sqrt{2} - i\sqrt{2}$

1) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

2) Placer alors les points A, B et C d'affixes respectives 2, z_1 et z_2.

3) Déterminer sous forme algébrique l'affixe du point $I = A * B$.

4) Calculer OI et une mesure de $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OI}}\right)$.

5) Donner alors z_I sous forme trigonométrique et en déduire les valeurs de $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right)$ et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)$

Exercice 11

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

1) Le nombre complexe $\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{1 + i}$ a pour argument :

a) $\dfrac{\pi}{12}$ **b)** $\dfrac{\pi}{4}$ **c)** $\dfrac{\pi}{3}$

2) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : -1 ; $1 + 2i$; 3 et $-3i$. Alors on a :

a) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux.

b) le quadrilatère $ABCD$ est un parallélogramme.

c) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.

3) Un argument du nombre complexe $(1 + i)^{2013}$ est :

a) $\dfrac{\pi}{4}$ **b)** $\dfrac{3\pi}{4}$ **c)** $\dfrac{\pi}{2}$

Exercice 12

Soient les points A et B d'affixes respectives : $z_A = 2 - 2i$ et $z_B = 2 + 2i$

1) Placer A et B.

2) Qu'elle est la nature du triangle OAB.

3) Soit le point C d'affixe $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(2 - 2i)$

a) Ecrire z_C sous forme algébrique et trigonométrique.

b) En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$ et $\sin\frac{\pi}{12}$

4) a) Comparer OA et OC et donner une mesure de l'angle $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OC}}\right)$.

b) En déduire la nature du triangle OAC.

5) Déterminer et construire l'ensemble Δ des $M(z)$ tel que : $|iz-2-2i| = \lceil z-2-2i \rceil$ (de deux manières)

6) Déterminer et construire l'ensemble Δ' des $M(z)$ tel que : $z = 2+2i\cos\theta\ ;\ \theta \in [0\,,\pi]$

Exercice 13

1) Déterminer l'écriture trigonométrique de : $1+i\ ;\ 1-i\ \ et\ \ 1+i\sqrt{3}$.

2) On pose $Z = \frac{(1-i)^3}{(1+i)^2(1+i\sqrt{3})}$

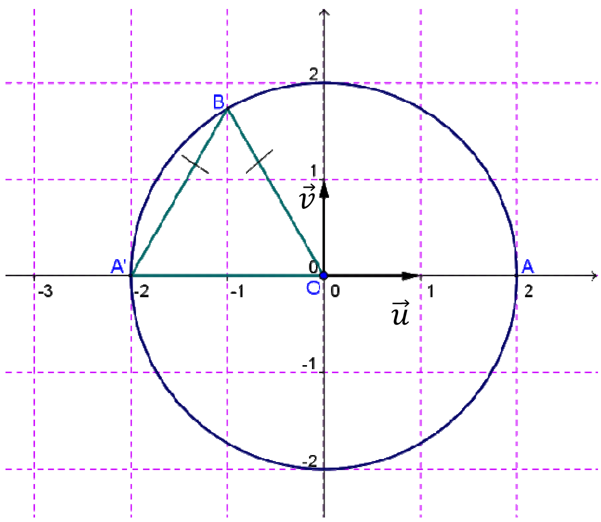
a) Déterminer l'écriture trigonométrique de Z.

b) Déterminer l'écriture algébrique de Z.

3) En déduire $\cos\frac{7\pi}{12} = -\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ et $\sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}$

4) Résoudre dans $[0\,,2\pi[$ l'équation $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x - \left(\sqrt{3}-1\right)\cos x = \sqrt{2}$.

Exercice 14



Dans la figure ci-contre $(O\,,\vec{u}\,,\vec{v})$ est un repère orthonormé direct du plan, C est le cercle de centre O et de rayon 2 et B est un point d'affixe z_B.

1) Déterminer par lecture graphique le module et un argument de z_B. En déduire que $z_B = -1+i\sqrt{3}$.

2) a) Placer sur la figure le point C d'affixe $z_C = 1+i\sqrt{3}$.

b) Montrer que le quadrilatère $OACB$ est un losange.

3) On se propose de déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que z^3 soit un réel positif ou nul.

a) Vérifier que les points O, A et B appartient à E.

b) Prouver que tout point M de la demi-droite $[OB)$ appartient à E.

c) Soit z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ.

Montrer que z^3 est un réel positif si et seulement si : $\theta = \frac{2k\pi}{3}\ ;k \in \mathbb{Z}$

d) En déduire que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera.

Représenter E sur la figure.

Exercice 15

On désigne par (C) le cercle de centre O et de rayon 1 et par I et A les points d'affixes respectifs 1 et $a = \sqrt{3}+i$.

1) a) Donner la forme exponentielle de a.

b) Construire le point A.

2) Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{a-1}{1-\overline{a}}$

a) Vérifier que $b\overline{b} = 1$. En déduire que le point B appartient au cercle (C).

b) Montrer que $\dfrac{b-1}{a-1}$ est un réel.

En déduire que les points A, B et I sont alignés.

c) Construire le point B.

3) Soit θ un argument du nombre complexe b.

Montrer que $\cos\theta = \dfrac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta = \dfrac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$