Exercice 1

1) $z_1 = (1-i)(1+2i) = 1+2i-i+2 = 3+i$

$z_2 = \frac{2+6i}{3-i} = \frac{(2+6i)(3+i)}{(3-i)(3+i)} = \frac{6+2i+18i-6}{3^2+1^2} = \frac{20i}{10} = 2i$

$z_3 = \frac{4i}{i-1} = \frac{4i}{-1+i} = \frac{4i(-1-i)}{(-1+i)(-1-i)} = \frac{-4i+4}{(-1)^2+1^2} = 2-2i$

2) $AB = |z_B - z_A| = |2i-3-i| = |-3+i| = \sqrt{(-3)^2+1^2} = \sqrt{10}$

$AC = |z_C - z_A| = |2-2i-3-i| = |-1-3i| = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}$

on alors $AB = AC$ (1)

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{-3+i}{-1-3i} = \frac{(-3+i)(-1+3i)}{(-1-3i)(-1+3i)} = \frac{-10i}{10} = -i \in i\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \quad (2)$$

de (1) et (2) le triangle ABC est isocèle et rectangle en A.

3) On a ABC est isocèle et rectangle, pour que $ABDC$ soit un carré il faut que $ABDC$ soit un parallélogramme $\Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{AB}} = z_{\overrightarrow{CD}} \Leftrightarrow z_B - z_A = z_D - z_C \Leftrightarrow z_D = z_B - z_A + z_C$

alors $z_D = 2i-3-i+2-2i = -1-i$ donc $z_4 = -1-i$

Exercice 2

1) a) On a :

$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} = \frac{1+i+2i}{4+2i+2i} = \frac{1+3i}{4+8i} = \frac{(1+3i)(4-8i)}{(4+8i)(4-8i)} = \frac{4-8i+12i+24}{4^2+8^2} = \frac{28+4i}{80} \notin \mathbb{R}$$

alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires par suite les points A, B et C ne sont pas alignés.

b) On a : $\frac{z_A+z_C}{2} = \frac{-2i+4+2i}{2} = 2 = Z_I \Leftrightarrow I$ est le milieu de $[AC]$

2) a) On a : D le symétrique du point B par rapport au point $I \Leftrightarrow I = B * D \Leftrightarrow Z_I = \frac{z_B+z_D}{2}$

$\Leftrightarrow 2Z_I = z_B + z_D$ alors $z_D = 2Z_I - z_B = 4-1-i = 3-i$

b) On a : $I = A * C = B * D$ alors $ABCD$ est un parallélogramme (1)

On a : $AB = |z_B - z_A| = |1+i+2i| = |1+3i| = \sqrt{1^2+3^2} = \sqrt{10}$

$AD = |z_D - z_A| = |3-i+2i| = |3+i| = \sqrt{3^2+1^2} = \sqrt{10}$

On a alors $AB = AD$ (2)

de (1) et (2) $ABCD$ est un losange.

c) $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{AC}}} = \frac{28+4i}{80} \notin i\mathbb{R}$ alors les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas orthogonaux par suite $ABCD$ n'est pas un carré.

3) $M(z) \in E \Leftrightarrow \left|\frac{z-1-i}{z+2i}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-(1+i)}{z-(-2i)}\right| = 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right| = 1 \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow MA = MB$

$\Leftrightarrow M \in$ med $[AB]$ alors $E =$ med $[AB]$

$M(z)\in P\in F \Leftrightarrow \frac{z-1-i}{z+2i}\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \frac{z_M-z_B}{z_M-z_A}\in\mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MA},\overrightarrow{MB}}\right)\equiv 0[2\pi]$

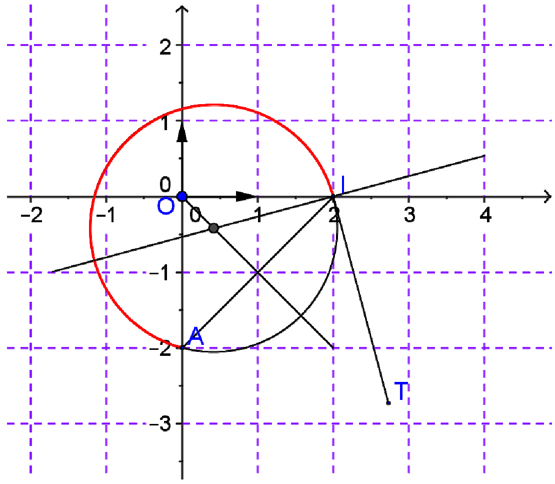
par suite $F=(AB)\backslash[AB]$

4) $M(z)\in G \Leftrightarrow arg\left(\frac{2z+4i}{2-z}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{2(z+2i)}{-(z-2)}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow \arg(2)+arg\left(\frac{z+2i}{-(z-2)}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow 0+arg\left(-\frac{z+2i}{z-2}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z+2i}{z-2}\right)+\pi\equiv\frac{2\pi}{3}\,[2\pi]$

$\Leftrightarrow arg\left(\frac{z-(-2i)}{z-2}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_I}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MI},\overrightarrow{MA}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$

par suite G est l'arc $[\overset{\frown}{IA}]$ privé des points A et I du cercle passant par A et I et tangent à (IT) en I tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{IT},\overrightarrow{IA}}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}\,[2\pi]$



Exercice 3

1) a) Pour $M\neq A$ on a : $OM'=|z'|=\left|\frac{iz-4}{z+i}\right|=\frac{|iz-4|}{|z+i|}=\frac{|i(z+4i|}{|z+i|}=\frac{|i||z-(-4i)|}{|z-(-i)|}=\frac{|z_M-z_C|}{|z_M-z_A|}=\frac{CM}{AM}$

b) On a : M' appartient au cercle trigonométrique $\Leftrightarrow OM'=1 \Leftrightarrow \frac{CM}{AM}=1 \Leftrightarrow CM=AM$

alors M varie sur la médiatrice de $[AC]$.

2) a) Pour $z\neq -i$ on a : $(z'-i)(z+i)=\left(\frac{iz-4}{z+i}-i\right)(z+i)=\left(\frac{iz-4-iz+1}{z+i}\right)(z+i)=-3$

On a : $(z'-i)(z+i)=-3 \Rightarrow |(z'-i)(z+i)|=|-3| \Leftrightarrow |z_{M'}-z_B||z_M-z_A|=3 \Leftrightarrow BM'.AM=3$

b) On a : le point M appartient au cercle C de centre A et de rayon 3 $\Leftrightarrow AM=3$ alors $3.BM'=3$ alors $BM'=1$ alors le point M' appartient au cercle C' de centre B et de rayon 1.

3) a) Pour $M\neq A$ on a : $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv\arg(z')\,[2\pi]\equiv arg\left(\frac{iz-4}{z+i}\right)[2\pi]\equiv arg\left[i\left(\frac{z-(-4i)}{z-(-i)}\right)\right][2\pi]$

$\equiv\arg(i)+arg\left(\frac{z_M-z_C}{z_M-z_A}\right)[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}+\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CM}}\right)[2\pi]$

b) On a : $M\in[AB]\backslash\{A,B\}$ alors $\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CM}}\right)\equiv\pi[2\pi]$ alors $\frac{\pi}{2}+\left(\widehat{\overrightarrow{AM},\overrightarrow{CM}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}+\pi[2\pi]$

alors $\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM'}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$ par suite le point M' à la demi droite $[OA)\backslash\{O\}$

Exercice 4

1) a) On a : $arg(z')\equiv arg\left(\frac{z-1}{z+1}\right)[2\pi]\equiv arg\left(\frac{z_M-z_A}{z_M-z_B}\right)[2\pi]\equiv arg\left(\frac{z_{\overrightarrow{AM}}}{z_{\overrightarrow{BM}}}\right)[2\pi]\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{BM},\overrightarrow{AM}}\right)[2\pi]$

$M(z) \in \Delta \iff z' \in \mathbb{R} \iff arg(z') = k\pi\ ; k \in \mathbb{Z} \iff \left(\widehat{\overrightarrow{BM}\,,\overrightarrow{AM}}\right) = k\pi\ ; k \in \mathbb{Z}$ alors $M \in (AB)\backslash\{B\}$

par suite $\Delta = (AB)\backslash\{B\}$

b) $M(z) \in \Delta' \iff z' \in i\mathbb{R} \iff arg(z') = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z} \iff \left(\widehat{\overrightarrow{BM}\,,\overrightarrow{AM}}\right) = \frac{\pi}{2} + k\pi\ ; k \in \mathbb{Z} \iff \overrightarrow{BM} \perp \overrightarrow{AM}$

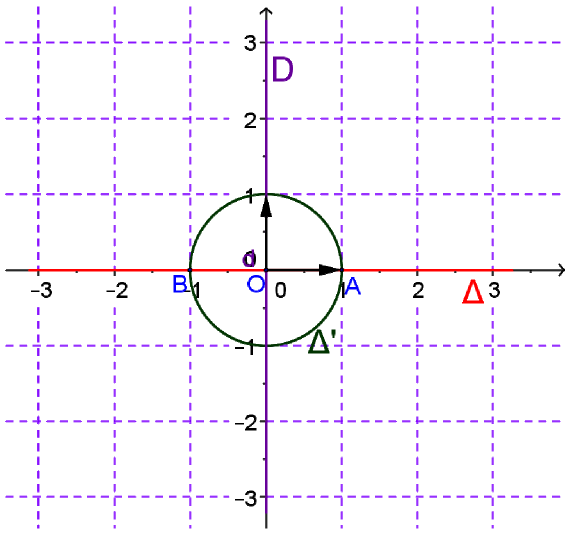
alors M décrit le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B

par suite Δ' est le cercle de diamètre $[AB]$ privé des points A et B.

c) $|z'| = \left|\frac{z-1}{z+1}\right| = \left|\frac{z_M - z_A}{z_M - z_B}\right| = \frac{|z_M - z_A|}{|z_M - z_B|} = \frac{AM}{BM}$

$M(z) \in D \iff |z'| = 1 \iff \frac{AM}{BM} = 1 \iff AM = BM \iff M \in med[AB]$

par suite $D = med[AB]$



2) a) $\forall z \neq -1$ on a : $(z'-1)(z+1) = \left(\frac{z-1}{z+1} - 1\right)(z+1) = \left(\frac{z-1-z-1}{z+1}\right)(z+1) = \left(\frac{-2}{z+1}\right)(z+1) = -2$

b) On a : $(z'-1)(z+1) = -2 \Rightarrow |(z'-1)(z+1)| = |-2| \iff |z'-1||z+1| = 2$

$\iff |z_{M'} - z_A||z_M - z_B| = 2 \iff AM' \times BM = 2$

On a : $(z'-1)(z+1) = -2 \Rightarrow arg\left[(z'-1)(z+1) \equiv \arg(-2)[2\pi]\right]$

$\iff arg(z'-1) + arg(z+1) \equiv \pi[2\pi] \iff arg(z_{M'} - z_A) + arg(z_M - z_B) \equiv \pi[2\pi]$

$\iff arg\left(z_{\overrightarrow{AM'}}\right) + arg\left(\overrightarrow{BM}\right) \equiv \pi\ [2\pi] \iff \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{BM}}\right) \equiv \pi\ [2\pi]$

3) Le point M appartient au cercle (Γ) de centre B et de rayon 2 $\iff BM = 2$

or $AM' \times BM = 2 \Rightarrow 2AM' = 2 \Rightarrow AM' = 1$

alors le point M' appartient au cercle (Γ') de centre A et de rayon 1.

4) Pour $M \neq B$ on a :

$\left(\widehat{\overrightarrow{AN}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{AN}\,,\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)[2\pi] \equiv -\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AN}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)[2\pi]$

$\equiv -arg\left(z_{\overrightarrow{AN}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)[2\pi] \equiv -arg(z_N - z_A) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)[2\pi]$

$\equiv -arg(-\bar{z} - 1) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)[2\pi] \equiv -arg\left(\overline{-z-1}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)[2\pi]$

$\equiv arg(-z-1) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)[2\pi] \equiv arg[-(z+1)] + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)[2\pi]$

$\equiv arg(z+1) + \pi + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right)[2\pi] \equiv arg[z-(-1)] + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) + \pi[2\pi]$

$$\equiv arg(z_M - z_B) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) + \pi[2\pi] \equiv arg\left(z_{\overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) + \pi[2\pi]$$

$$\equiv \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{BM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{AM'}}\right) + \pi[2\pi] \equiv \pi + \pi\ [2\pi] \equiv 0[2\pi]$$

par suite les vecteurs $\overrightarrow{AN}$ et $\overrightarrow{AM'}$ sont colinéaires et de même sens alorts le point M' appartient à la demi droite $[AN)$.

5) **a)** On a : $t + 1 = -2 + i\sqrt{3} + 1 = -1 + i\sqrt{3} = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right] = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

b) On a : $z_K = -2 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_K + 1 = -1 + i\sqrt{3} \Leftrightarrow z_K - z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}}$

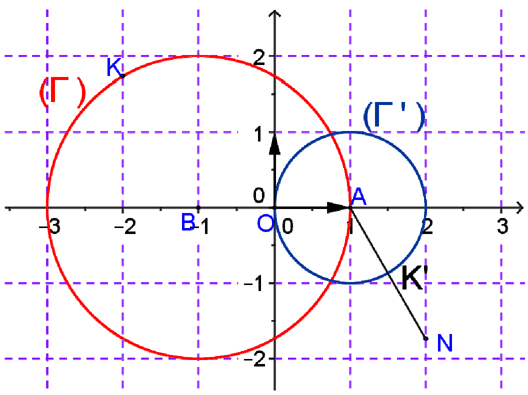
$\Rightarrow |z_K - z_B| = \left|2e^{i\frac{2\pi}{3}}\right| \Leftrightarrow BK = 2$ alors le point K appartient au cercle de centre B et de rayon 2 par suite le point K appartient au cercle (Γ).

6) On a : $z_K - z_B = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{BK}} = 2e^{i\frac{2\pi}{3}} \Rightarrow \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{BK}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Le point $K \in (\Gamma)$ et $K' = f(K)$ alors le point $K' \in (\Gamma')$ d'après la question **3)**

soit le point N tel que $z_N = -\overline{z_K}$ alors $K' \in [AN)$ d'après la question **4)**

<u>conclusion</u> $K' \in (\Gamma') \cap [AN)$



Exercice 5

1) **a)** $z_A = \sqrt{3} + i \quad z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$

alors les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ ne sont pas colinéaires par suite les points O, A et B ne sont pas alignés.

b) On a G centre du triangle $OAB \Leftrightarrow \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow z_{\overrightarrow{GO}} + z_{\overrightarrow{GA}} + z_{\overrightarrow{GB}} = 0$

alors $-z_G + z_A - z_G + z_B - z_G = 0$ alors $-3z_G + z_A + z_B = 0$ alors

$$z_G = \frac{z_A + z_B}{3} = \frac{\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)}{3} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 2)}{3}$$

c) $z_A = \sqrt{3} + i = 2\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$

2) **a)** $|z_C| = OC = OA = |z_A| = 2$

$$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow -\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow -arg(z_A) + arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow arg(z_C) \equiv arg(z_A) + \frac{\pi}{6}[2\pi]$$

$$\Leftrightarrow arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6}[2\pi] \Leftrightarrow arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

b) $\begin{cases} |z_C| = 2 \\ arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z_C = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 1 + i\sqrt{3}$

3) a) $z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3}+1) - 1 - i\sqrt{3} = \sqrt{3} + i = z_A = z_{\overrightarrow{OA}}$

$z_{\overrightarrow{CB}} = z_{\overrightarrow{OA}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow OABC$ est un parallélogramme (1)

$OA = OC \quad (2)$

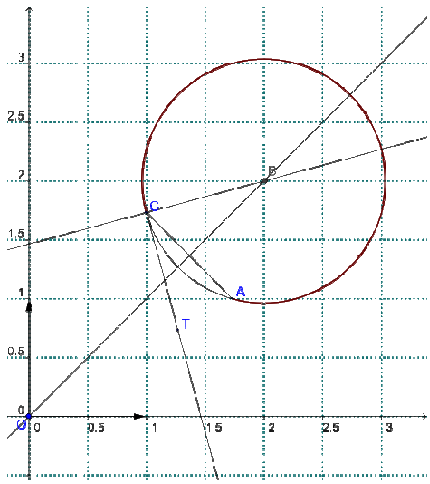
De (1) et (2) $OABC$ est un losange

b) $\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OC}}} = \frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-3i+i+\sqrt{3}}{1+3} = \frac{2\sqrt{3}-2i}{4} \notin i\mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OC}$ ne sont pas orthogonaux alors $OABC$ n'est pas un carré

4)

$$M(z) \in E \Leftrightarrow \frac{z - z_A}{z - z_C} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_M - z_C} \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi] \Leftrightarrow \left(\widehat{\overrightarrow{MC}, \overrightarrow{MA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$$

E est l'arc $[\overset{\frown}{CA}]$ privé des points A et C du cercle passant par A et C et tangent à (CT) en C tel que : $\left(\widehat{\overrightarrow{CT}, \overrightarrow{CA}}\right) \equiv \frac{\pi}{6}\ [2\pi]$



Exercice 6

1) a) $f(C) = C' \Leftrightarrow z_{C'} = \frac{z_C + 1}{z_C - 2i} = \frac{i+1}{i-2i} = \frac{1+i}{-i} = \frac{(1+i)i}{-i^2} = -1 + i$

$z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = i + 1 = 1 + i \qquad z_{\overrightarrow{C'A}} = z_A - z_{C'} = 2i + 1 - i = 1 + i$

On a alors $z_{\overrightarrow{BC}} = z_{\overrightarrow{C'A}} \Leftrightarrow \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{C'A} \Leftrightarrow ACBC'$ est un parallélogramme

b) Soit M un antécédent de C par f donc $f(C) = M \Leftrightarrow z_C = \frac{z_M + 1}{z_M - 2i}$

$\Leftrightarrow z_C(z_M - 2i) = z_M + 1 \Leftrightarrow z_M(z_C - 1) = 2iz_C + 1 \Leftrightarrow z_M = \frac{2iz_C + 1}{z_C - 1}$

$\Leftrightarrow z_M = \frac{-1}{-1+i} \Leftrightarrow z_M = \frac{1+i}{2}$ alors le point C admet un unique antécédent C'' tel que $z''_C = \frac{1+i}{2}$

2) a) $M \in E \Leftrightarrow \frac{z+1}{z-2i}$ est un imaginaire non nul

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A} \text{ est un imaginaire non nul} \\ M \neq A \text{ et } M \neq B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\widehat{\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [\pi] \\ M \neq A \text{ et } M \neq B \end{cases}$

$\Leftrightarrow M$ apparient au cercle de diamètre $[AB] \backslash \{A, B\}$

b) $M \in F \Leftrightarrow M'$ apparient au cercle de centre O et de rayon 1 $\Leftrightarrow OM' = 1$

$\Leftrightarrow |z'| = 1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{z+1}{z-2i}\right| = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\dfrac{z_M - z_B}{z_M - z_A}\right| = 1 \\ M \neq A \text{ et } M \neq B \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{MB}{MA} = 1 \\ M \neq A \text{ et } M \neq B \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} MB = MA \\ M \neq A \text{ et } M \neq B \end{cases} \Leftrightarrow M$ appartient à la médiatrice du segment $[AB]$

Exercice 7

1) a) On a : $\frac{z_M - z_P}{z_N - z_P} = \frac{z - z^3}{z^2 - z^3} = \frac{z(1-z^2)}{z^2(1-z)} = \frac{(1-z)(1+z)}{z(1-z)} = \frac{(1-z)(1+z)}{z(1-z)} = \frac{1+z}{z}$

Le triangle MNP est rectangle en $P \Leftrightarrow \frac{z_M - z_P}{z_N - z_P}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur.

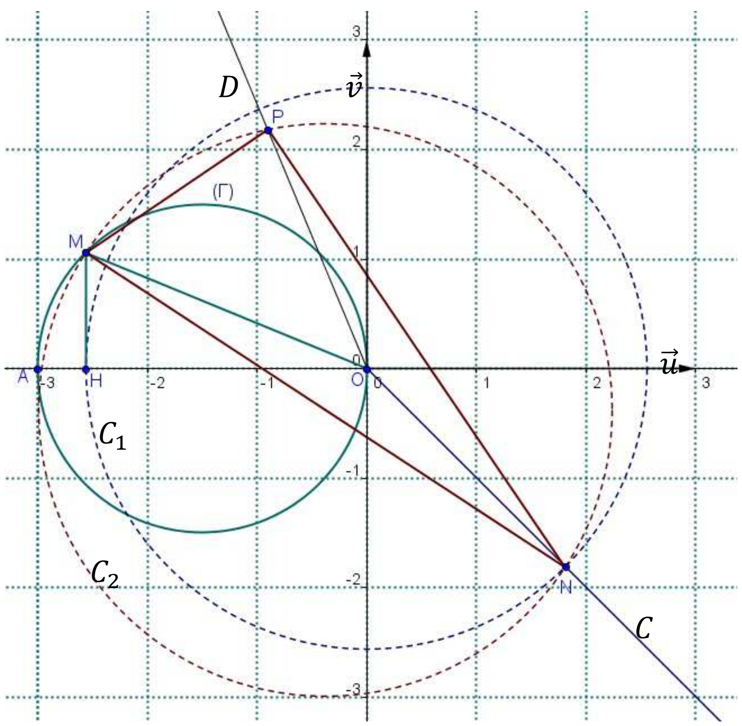
b) $\frac{1+z}{z} = \frac{1+x+iy}{x+iy} = \frac{(1+x+iy)(x-iy)}{(x+iy)(x-iy)} = \frac{x-iy+x^2-ixy+-ixy+y^2}{x^2+y^2} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$

c) soit M un point du plan d'affixe $z = x + iy$ non nulle et différent de 1 et -1

on a : $\frac{1+z}{z} = \frac{1+x+iy}{x+iy} = \frac{(1+x+iy)(x+iy)}{(x+iy)(x+iy)} = \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$

$M \in (\Gamma) \Leftrightarrow$ le triangle MNP est rectangle en $P \Leftrightarrow \frac{1+z}{z}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \frac{x^2+y^2+x-iy}{x^2+y^2}$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 + x = 0 \\ M \neq O \\ M \neq A \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ M \neq O \\ M \neq A \end{cases} \Leftrightarrow M$ appartient au cercle de centre $I\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ et de rayon $\frac{1}{2}$ privé des points O et A, or le point $I\left(-\frac{1}{2}\ ,\ 0\right)$ est le milieu du segment $[OA]$ et $OI = \frac{1}{4}$ donc M appartient au cercle de diamètre $[OA]$ alors (Γ) est le cercle de diamètre $[OA]$

2) a)



b) $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OM},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right)\ [2\pi] \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv -arg(z) + \arg(z^2)\ [2\pi] \equiv -arg(z) + 2arg(z)\ [2\pi]$

$\equiv arg(z)\ [2\pi] \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$

$\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{ON},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OP}}\right)\ [2\pi] \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{ON}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OP}}\right)\ [2\pi]$

$\equiv -\arg(z^2) + \arg(z^3)\ [2\pi] \equiv -2arg(z) + 3arg(z)\ [2\pi]$

$\equiv arg(z)\ [2\pi] \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$

$ON = |z_N| = |z^2| = |z|^2 = OM^2$

c) On a M et H ont même abscisse et $H \in (O,\vec{u})$ donc $z_H = x$ avec $x < 0$ donc $OH = -x$

or $M \in (\Gamma)$ alors $x^2 + y^2 + x = 0$ donc $-x = x^2 + y^2$ et $OM = \sqrt{x^2 + y^2}$ donc $OH = OM^2$

d) On a : $\begin{cases} ON = OM^2 \\ OH = OM^2 \end{cases}$ donc $ON = OH$ alors N appartient au cercle C_1 de centre O et de rayon OH

d'autre part $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{ON}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$ donc N appartient à la demi droite $[OC)$

tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OM},\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$

Conclusion : $N \in C_1 \cap [OC)$

Le triangle MNP est rectangle en P donc P appartient au cercle C_2 de diamètre $[MN]$ d'autre part

$\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OP}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$ donc P appartient à la demi droite $[OD)$ tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{ON},\overrightarrow{OD}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OM}}\right)\ [2\pi]$

Conclusion : $P \in C_2 \cap [OD)$

Exercice 8

1) a) $Aff(E) = 1\ \ Aff(F) = i\ \ Aff(M) = 1 + e^{i\theta}\ \ Aff(N) = i(1 + e^{i\theta})$

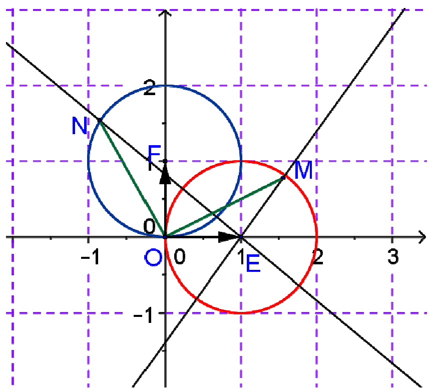
$Aff(\overrightarrow{FN}) = Aff(N) - Aff(F) = i(1 + e^{i\theta}) - i = i + ie^{i\theta} - i = ie^{i\theta} = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

b) On a : $Aff(\overrightarrow{EM}) = e^{i\theta} \Leftrightarrow \begin{cases} EM = 1 \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{EM}}\right) \equiv \theta\ [2\pi] \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases}$ alors M varie sur le cercle de centre E et de rayon 1

par suite M varie sur C_1

on a : $Aff(\overrightarrow{FN}) = e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)} \Leftrightarrow \begin{cases} FN = 1 \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{FN}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \theta\ [2\pi] \\ 0 \le \theta < 2\pi \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} FN = 1 \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{FN}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} + \theta\ [2\pi] \\ \frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} + \theta < \frac{5\pi}{2} \end{cases}$ alors N varie sur le

cercle de centre F et de rayon 1 par suite N varie sur C_2



c) $\left(\widehat{\overrightarrow{FN},\overrightarrow{EM}}\right) \equiv arg\left(\frac{Aff(\overrightarrow{EM})}{Aff(\overrightarrow{FN})}\right)[2\pi] \equiv arg\left(\frac{e^{i\theta}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}}\right)[2\pi] \equiv arg\left(e^{i\frac{\pi}{2}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ alors $\overrightarrow{EM} \perp \overrightarrow{FN}$

par suite les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2) a) $\frac{Aff(\overrightarrow{EP})}{Aff(\overrightarrow{EM})} = \frac{Aff(P)-Aff(E)}{e^{i\theta}} = \frac{(1-i)\sin\theta\times e^{i\theta}-1}{e^{i\theta}} = \left[(1-i)\sin\theta\times e^{i\theta}-1\right]e^{-i\theta} = (1-i)\sin\theta - e^{-i\theta}$

$= \sin\theta - i\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) = \sin\theta - i\sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta = \sin\theta - \cos\theta$

$\frac{Aff(\overrightarrow{FP})}{Aff(\overrightarrow{FN})} = \frac{Aff(P)-Aff(F)}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}} = \frac{(1-i)\sin\theta\times e^{i\theta}-i}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}} = \frac{(1-i)\sin\theta\times e^{i\theta}-e^{i\frac{\pi}{2}}}{e^{i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}} = \left[(1-i)\sin\theta\times e^{i\theta}-e^{i\frac{\pi}{2}}\right]e^{-i\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$

$= (1-i)\sin\theta\times e^{-i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\theta} = -i(1-i)\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta) = -i\sin\theta - \sin\theta - \cos\theta + i\sin\theta$

$= -\sin\theta - \cos\theta$

b) On a : $\frac{Aff(\overrightarrow{EP})}{Aff(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{EP}$ et $\overrightarrow{EM}$ son colinéaires alors $M \in (EM)$

On a : $\frac{Aff(\overrightarrow{FP})}{Aff(\overrightarrow{FN})} = -\sin\theta - \cos\theta \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \overrightarrow{FP}$ et $\overrightarrow{FN}$ son colinéaires alors $M \in (FN)$

alors P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

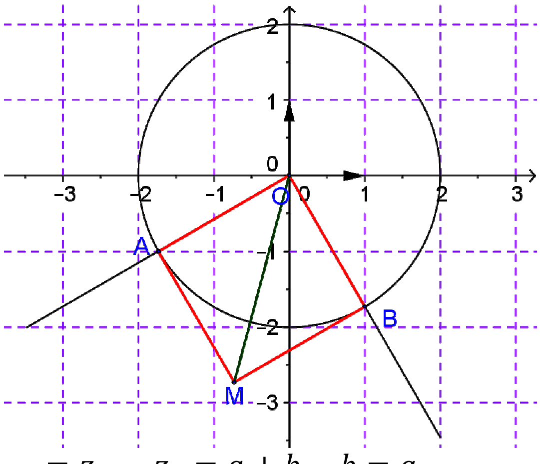
Exercice 9

1) a) On a : $a = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right]$

$b = 1 - i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

b) On a : $z_A = a = 2\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] \Leftrightarrow \begin{cases} OA = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) \equiv -\frac{5\pi}{6}[2\pi] \end{cases}$

$z_B = b = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) \Leftrightarrow \begin{cases} OB = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases} \begin{cases} OB = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv -\frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$



2) a) On a : $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A = a \quad z_{\overrightarrow{BM}} = z_M - z_B = a + b - b = a$

on a alors $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{BM}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BM} \Leftrightarrow OAMB$ est un parallélogramme (1)

on a : $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA},\vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv -\left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OA}}\right) + \left(\widehat{\vec{u},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{3}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

on a alors $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ (2)

on a : $OA = OB$ (3)

de (1), (2) et (3) $OAMB$ est un carré

b) On a : $OAMB$ est un carré et $OA = 2$ alors $OM = 2\sqrt{2}$ par suite $|z| = 2\sqrt{2}$ (1)

On a : $OAMB$ est un carré alors $[OM)$ est la bissectrice intérieure du secteur $[OA, OB]$

par site $\left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}}\right) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$

d'autre part $\arg(z) \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OM}}\right)[2\pi] \equiv \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right) + \left(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OM}}\right)[2\pi] \equiv -\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}[2\pi] \equiv -\frac{7\pi}{12}[2\pi]$ (2)

de (1) et (2) $\quad z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right]$

c) On a : $z = a + b = -\sqrt{3} - i + 1 - i\sqrt{3} = 1 - \sqrt{3} + i(-1 - \sqrt{3})$

d'autre part on a : $z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)\right] = 2\sqrt{2}\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) + i2\sqrt{2}\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right)$

alors $\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = 1 - \sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = -1 - \sqrt{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\left(-\frac{7\pi}{12}\right) = \frac{-1-\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \cos\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{7\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

or $\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{12}$ alors $\begin{cases} \cos\frac{7\pi}{12} = -\sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{7\pi}{12} = \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$ alors $\begin{cases} \sin\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \\ \cos\frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4} \end{cases}$

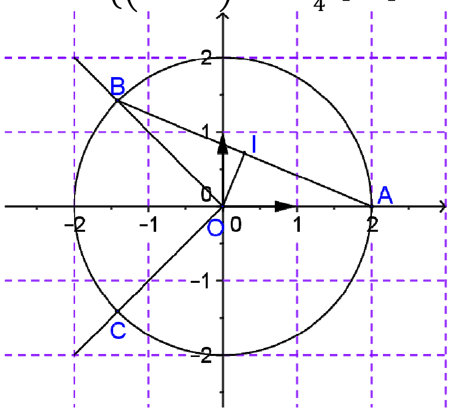
Exercice 10

1) On a : $z_1 = -\sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right]$

$z_2 == -\sqrt{2} - i\sqrt{2} = 2\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

2) $z_B = z_1 = 2\left[\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right] \Leftrightarrow \begin{cases} OB = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right) \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$

$z_C = z_2 = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right] \Leftrightarrow \begin{cases} OC = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OC}}\right) \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi] \end{cases}$



3) On a : $I = A * B \Leftrightarrow z_I = \frac{z_B + z_A}{2} = \frac{-\sqrt{2}+i\sqrt{2}+2}{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

4) On a $z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow OI = |z_I| = \sqrt{\left(\frac{2-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{8-4\sqrt{2}}{4}} = \sqrt{2-\sqrt{2}}$

Le triangle OAB est $I = A * B$ alors $[OI)$ est la bissectrice intérieure du secteur $[OA, OB]$

par site $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{1}{2}\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}\right)[2\pi] \equiv \frac{1}{2}\left[\left(\widehat{\overrightarrow{OA}, \vec{u}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]\right] \equiv \frac{1}{2}\left[-\left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OA}}\right) + \left(\widehat{\vec{u}, \overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]\right]$

$\equiv \frac{1}{2}\left(0 + \frac{3\pi}{4}\right)[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

or $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OI}}\right) \equiv \left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OI}}\right)[2\pi]$ car $\overrightarrow{OA}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires et de même sens alors $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

5) On a : $OI = |z_I| = \sqrt{2-\sqrt{2}}$ et $arg(z_I) \equiv \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OI}}\right) \equiv \frac{3\pi}{8}[2\pi]$

alors $z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$

on a $z_I = \frac{2-\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ et $z_I = \sqrt{2-\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right)\right]$

alors $\begin{cases} \sqrt{2-\sqrt{2}}\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2} \\ \sqrt{2-\sqrt{2}}\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ alors $\begin{cases} \cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \\ \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2-\sqrt{2}}} \end{cases}$

Exercice 11

1) a) $\frac{\pi}{12}$ voici l'explication

$$arg\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1+i}\right) \equiv arg\left(\frac{2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}\right)[2\pi] \equiv arg\left(\sqrt{2}\frac{e^{i\frac{\pi}{3}}}{e^{i\frac{\pi}{4}}}\right)[2\pi] \equiv arg\left(\sqrt{2}e^{i\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right)}\right)[2\pi]$$

$$\equiv arg\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}\right)[2\pi] \equiv \frac{\pi}{12}[2\pi]$$

2) c) les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires voici l'explication

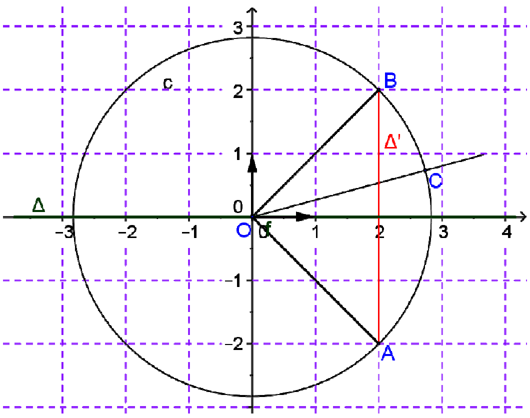
$$\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{CD}}} = \frac{z_B - z_A}{z_D - z_C} = \frac{1+2i+1}{-3i-3} = \frac{2+2i}{-3-3i} = \frac{(2+2i)(-3+3i)}{(-3-3i)(-3+3i)} = -\frac{2}{3} \in \mathbb{R}$$

3) b) Un argument du nombre complexe $(1+i)^{2013}$ est : $\frac{3\pi}{4}$ voici l'explication

$$arg((1+i)^{2013}) \equiv arg\left[\left(\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right)^{2013}\right][2\pi] \equiv arg\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^{2013}[2\pi] \equiv \frac{2013\pi}{4}[2\pi] \equiv \frac{3\pi}{4}[2\pi]$$

Exercice 12

1)



2) $OA = |z_A| = |2-2i\,| = \sqrt{2^2+(-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

$OB = |z_B| = |2+2i\,| = \sqrt{2^2+2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$

On a alors $OA = OB$ (1)

$$\frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OB}}} = \frac{z_A}{Z_B} = \frac{2-2i}{2+2i} = \frac{(2-2i)^2}{(2+2i)(2-2i)} = \frac{-8i}{8} = -i \in i\mathbb{R}$$

On a alors $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ (2)

de (1) et (2) le triangle OAB est isocèle rectangle en O.

3) a) $z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(2-2i) = \left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)(2-2i) = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i) = \left(1+i\sqrt{3}\right)(1-i)$

$= 1 - i + i\sqrt{3} + \sqrt{3} = 1 + \sqrt{3} + i\left(-1+\sqrt{3}\right)$

$z_C = e^{i\frac{\pi}{3}}(2-2i) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right) = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{3}}e^{-i\frac{\pi}{4}} = 2\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{12}}$

$= 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

b) $z_C = 1 + \sqrt{3} + i\left(-1+\sqrt{3}\right) = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)$

$\begin{cases} 2\sqrt{2}\cos\frac{\pi}{12} = 1+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{12} = -1+\sqrt{3} \end{cases}$ $\begin{cases} \cos\frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \\ \sin\frac{\pi}{12} = \frac{-1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{-\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4} \end{cases}$

4) a) On a : $OA = 2\sqrt{2}$

$OC = |z_C| = \left|2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)\right| = 2\sqrt{2}$

$\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{OA}\,,\vec{u}\right)\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{OC}\right)[2\pi] \equiv -\left(\vec{u}\,,\overrightarrow{OA}\right) + \left(\vec{u}\,,\overrightarrow{OC}\right)[2\pi] \equiv -arg(z_A) + arg(z_C)[2\pi]$

$\equiv -arg(2-2i\,) + \frac{\pi}{12}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{12}[2\pi] \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

b) On a : $OA = OC$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{OA}\,,\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ alors le triangle OAC est équilatéral.

5) <u>Méthode géométrique :</u>

$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow |iz - 2 - 2i| = |z - 2 - 2i| \Leftrightarrow |i(z + 2i - 2)| = |z - (2+2i)|$

$\Leftrightarrow |i||[z - (2-2i)]| = |z - (2+2i)| \Leftrightarrow |z_M - z_A| = |z_M - z_B| \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow M \in med[AB]$

or $med[AB] = (O\,,\vec{u})$ par suite : $\Delta = (O\,,\vec{u})$

<u>Méthode analytique :</u>

On pose $z = x + iy$; $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$

$M(z) \in \Delta \Leftrightarrow |iz - 2 - 2i| = |z - 2 - 2i| \Leftrightarrow M(z) \in \Delta \Leftrightarrow |i(x+iy) - 2 - 2i| = |x + iy - 2 - 2i|$

$\Leftrightarrow |-y - 2 + i(x-2)| = |x - 2 + i(y-2)| \Leftrightarrow \sqrt{(y+2)^2 + (x-2)^2} = \sqrt{(x-2)^2 + (y-2)^2}$

$\Rightarrow (y+2)^2 + (x-2)^2 = (x-2)^2 + (y-2)^2 \Rightarrow (y+2)^2 = (y-2)^2$

$\Rightarrow y^2 + 4y + 4 = y^2 - 4y + 4 \Rightarrow 8y = 0 \Rightarrow y = 0$

par suite : $\Delta = (O\,,\vec{u})$

6) On pose $z = x + iy$; $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$

$M(z) \in \Delta' \Leftrightarrow z = 2 + 2i\cos\theta\,;\ \theta \in [0\,,\pi] \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2\cos\theta \\ -1 \le \theta \le 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ -2 \le y \le 2 \end{cases} \Leftrightarrow M \in [AB]$

par suite $\Delta' = [AB]$

Exercice 13

1) $1 + i = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$1-i=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

2) a) $Z=\frac{(1-i)^3}{(1+i)^2(1+i\sqrt{3})}=\frac{\left(\sqrt{2}e^{-i\frac{\pi}{4}}\right)^3}{2\left(\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\right)^2e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{2\sqrt{2}e^{-i\frac{3\pi}{4}}}{2\times 2e^{i\frac{\pi}{2}}e^{i\frac{\pi}{3}}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\left(-\frac{3\pi}{4}-\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{-\frac{19\pi}{12}}=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{5\pi}{12}}$

$=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$

b) $Z=\frac{(1-i)^3}{(1+i)^2(1+i\sqrt{3})}=\frac{(1-i)^2(1-i)}{2i(1+i\sqrt{3})}=\frac{-2i(1-i)}{2i(1+i\sqrt{3})}=\frac{-1+i}{1+i\sqrt{3}}=\frac{(-1+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})}=\frac{-1+i\sqrt{3}+i+\sqrt{3}}{4}=\frac{\sqrt{3}-1}{4}+i\frac{\sqrt{3}+1}{4}$

3) On a : $Z=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)\right]$ et $Z=\frac{-1+\sqrt{3}}{4}+i\frac{1+\sqrt{3}}{4}$ alors :

$\begin{cases}\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{4}\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{4}\end{cases}$ $\begin{cases}\cos\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{5\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$ or $\frac{5\pi}{12}\equiv\pi-\frac{7\pi}{12}[2\pi]$ alors :

$\begin{cases}\cos\left(\pi-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\left(\pi-\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$ or $\cos(\pi-x)=-\cos x$ et $\sin(\pi-x)=\sin x$ alors :

$\begin{cases}-\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$ $\begin{cases}\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)=-\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\\ \sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\end{cases}$

4) On a pour $x\in[0\,,2\pi[$ $\left(\sqrt{3}+1\right)\sin x-\left(\sqrt{3}-1\right)\cos x=\sqrt{2}$ $\Leftrightarrow$

$\left(\frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}}\right)\sin x-\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)\cos x=\frac{1}{2}$ $\Leftrightarrow$ $\sin\left(\frac{7\pi}{12}\right)\sin x+\cos\left(\frac{7\pi}{12}\right)\left(\frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}\right)\cos x=\frac{1}{2}$

or $\sin a\sin b+\cos a\cos b=\sin(a+b)$ alors : $\sin\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)=\frac{1}{2}$ alors : $\sin\left(x+\frac{7\pi}{12}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)$

$x+\frac{7\pi}{12}=\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ou $x+\frac{7\pi}{12}=\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{7\pi}{12}+\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ou $x=-\frac{7\pi}{12}+\pi-\frac{\pi}{6}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ ou $x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$

$x=-\frac{5\pi}{12}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ et $0\leq x<2\pi$

$0\leq-\frac{5\pi}{12}+2k\pi<2\pi$ $0\leq-\frac{5}{12}+2k<2$ $\frac{5}{12}\leq 2k<\frac{29}{12}$ $\frac{5}{24}\leq k<\frac{29}{24}$ alors $k=1$ donc $x=\frac{19\pi}{12}$

$x=\frac{\pi}{4}+2k\pi\ ;\ k\in\mathbb{Z}$ et $0\leq x<2\pi$

$0\leq\frac{\pi}{4}+2k\pi<2\pi$ $0\leq\frac{1}{4}+2k<2$ $-\frac{1}{4}\leq+2k<\frac{3}{4}$ $-\frac{1}{8}\leq k<\frac{3}{8}$ alors $k=0$ donc $x=\frac{\pi}{4}$

Conclusion : $S_{[0\,,2\pi[}=\left\{\frac{19\pi}{12}\,,\frac{\pi}{4}\right\}$

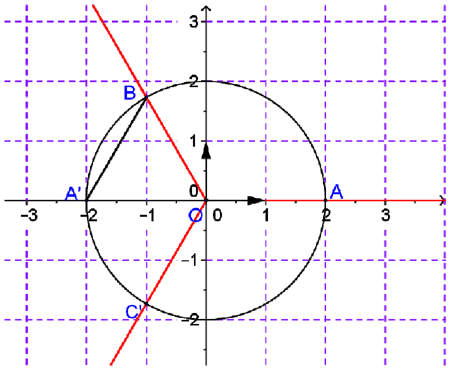
Exercice 14

1) Le triangle OBA' est un triangle équilatéral alors $OB=2$ par suite $|z_B|=2$

et $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ alors $arg(z_B)\equiv\frac{2\pi}{3}[2\pi]$

on a : $\begin{cases} |z_B| = 2 \\ arg(z_B) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ $\Leftrightarrow$ $z_B = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$

2) a) On a : $z_C = 1 + i\sqrt{3} = 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} OC = 2 \\ \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OC}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$



b) On a : $z_{\overrightarrow{OA}} = z_A = 2$ et on a : $z_{\overrightarrow{BC}} = z_C - z_B = 1 + i\sqrt{3} - \left(-1 + i\sqrt{3}\right) = 2$

on a alors $z_{\overrightarrow{OA}} = z_{\overrightarrow{BC}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{BC} \Leftrightarrow OACB$ est un parallélogramme (1)

et on a $OA = OB$ (2)

de (1) et (2) $OACB$ est un losange.

3) a) $z_O = 0$ alors $(z_O)^3 = 0$ par suite $O \in E$

$z_A = 2$ alors $(z_A)^3 = 8 > 0$ par suite $A \in E$

$z_B = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ alors $(z_B)^3 = 8(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 8 > 0$ par suite $A \in E$

b) On a : Si $M \in [OB)\backslash\{O\}$ alors $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]$ par suite $\left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OM}}\right) \equiv \frac{2\pi}{3}$

on pose $OM = r$ avec $r > 0$

alors $z_M = r\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ alors $(z_M)^3 = r^3(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = r^3 > 0$

alors $M \in E$

Si $M = O$ alors $M \in E$

Conclusion our tout point M de la demi-droite$[OB)$ appartient à E.

c) On a : z un nombre complexe non nul, de module r et d'argument θ

alors $z = re^{i\theta}$ alors $z^3 = r^3e^{i3\theta}$ et $|z^3| = r^3$

$z^3 \in \mathbb{R}_+^* \Leftrightarrow z^3 = |z^3| \Leftrightarrow r^3e^{i3\theta} = r^3 \Leftrightarrow e^{i3\theta} = 1 \Leftrightarrow 3\theta = 2k\pi\ ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}\ ; k \in \mathbb{Z}$

d) $M(z) \in E \Leftrightarrow z^3 \geq 0$

\# $z^3 = 0 \Leftrightarrow z = 0$ alors $M = O$

\# $z^3 > 0 \Leftrightarrow \theta = \frac{2k\pi}{3}\ ; k \in \mathbb{Z}$

$k = 0$ $\theta = 0$ alors $M \in [OA)\backslash\{O\}$

$k = 1$ $\theta = \frac{2\pi}{3}$ alors $M \in [OB)\backslash\{O\}$

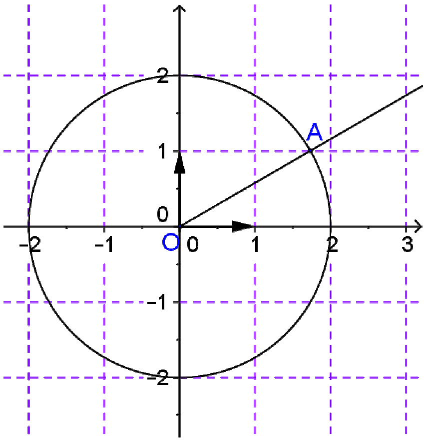
$k = 2$ $\theta = \frac{4\pi}{3}$ alors $M \in [OC')\backslash\{O\}$ tel que $C' = S_O(C)$

Conclusion $M(z) \in E \Leftrightarrow z^3 \geq 0 \Leftrightarrow M \in [OA) \cup [OB) \cup [OC')$

Exercice 15

1) a) $a=\sqrt{3}+i=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)=2e^{i\frac{\pi}{6}}$

b) $z_A=a=2e^{i\frac{\pi}{6}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} OA=2 \\ \left(\widehat{\vec{u}\,,\overrightarrow{OA}}\right)\equiv\frac{\pi}{6}[2\pi]\end{cases}$



2) On a : $b=\frac{a-1}{1-\overline{a}}$

a) On a : $b\overline{b}=\frac{a-1}{1-\overline{a}}\times\overline{\left(\frac{a-1}{1-\overline{a}}\right)}=\frac{a-1}{1-\overline{a}}\times\frac{\overline{a}-1}{1-a}=\frac{(a-1)(\overline{a}-1)}{(1-\overline{a})(1-a)}=1$

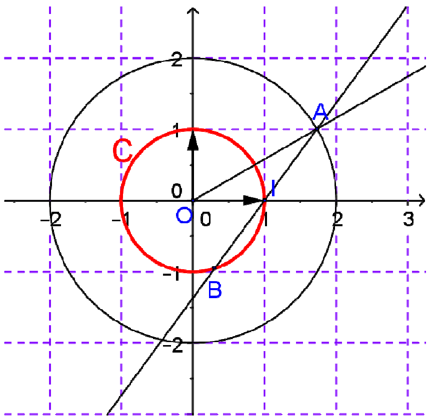
$OB=|b|=b\overline{b}=1$ alors le point B appartient au cercle (C).

b) On a : $b\overline{b}=1 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{b}=\frac{1}{b}$

$\overline{\left(\frac{b-1}{a-1}\right)}=\frac{\overline{b}-1}{\overline{a}-1}=\frac{\frac{1}{b}-1}{\overline{a}-1}=\frac{1-b}{b(\overline{a}-1)}=\frac{1-b}{\left(\frac{a-1}{1-\overline{a}}\right)(\overline{a}-1)}=\frac{b-1}{a-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{b-1}{a-1}\in\mathbb{R}$

$\frac{b-1}{a-1}=\frac{z_B-z_I}{z_A-z_I}=\frac{z_{\overrightarrow{IB}}}{z_{\overrightarrow{IA}}}\in\mathbb{R} \quad \Leftrightarrow \quad \overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IB}$ sont colinéaires alors les points A, B et I sont alignés.

c) On a B appartient au cercle (C) et les points A, B et I sont alignés alors $B\in(C).\cap(AI)$



3) On a : $b=e^{i\theta}=\frac{a-1}{1-\overline{a}}=\frac{\sqrt{3}-1+i}{1-\sqrt{3}+i}=\frac{(\sqrt{3}-1+i)(1-\sqrt{3}-i)}{(1-\sqrt{3}+i)(1-\sqrt{3}-i)}=\frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}+\frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}i$

alors $\cos\theta=\frac{2\sqrt{3}-3}{5-2\sqrt{3}}$ et $\sin\theta=\frac{2-2\sqrt{3}}{5-2\sqrt{3}}$