Correction continuité limites 4ème Mathématiques

Exercice 1

1) Pour tout réel x on a : $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 2 - \cos x \leq 3$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{2-\cos x} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$

2) Pour tout réel x on a : $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow$ pour tout réel $x > 0$ on a : $\frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x} f(x) \leq \frac{1}{x}$

$\Rightarrow \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x(2-\cos x)} \leq \frac{1}{x}$

$$\begin{cases} \frac{1}{3x} \leq \frac{1}{x(2-\cos x)} \leq \frac{1}{x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{3x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x(2-\cos x)} = 0$$

Pour tout réel x on a : $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{3} \leq (x^2+1) f(x) \leq x^2+1$

$\Rightarrow \frac{x^2+1}{3} \leq \frac{x^2+1}{2-\cos x} \leq x^2+1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{2-\cos x} \geq \frac{x^2+1}{3}$

$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{2-\cos x} \geq \frac{x^2+1}{3} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{3} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2-\cos x} = +\infty$$

Pour tout réel x on a : $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1 \Rightarrow \frac{x^2+1}{3x^2} \leq \frac{x^2+1}{x^2} f(x) \leq \frac{x^2+1}{x^2} \Rightarrow \frac{x^2+1}{3x^2} \leq \frac{x^2+1}{x^2(2-\cos x)} \leq \frac{x^2+1}{x^2}$

$\Rightarrow \frac{x^2+1}{x^2(2-\cos x)} \geq \frac{x^2+1}{3x^2}$

$$\begin{cases} \frac{x^2+1}{x^2(2-\cos x)} \geq \frac{x^2+1}{3x^2} \\ \lim\limits_{x\to0} \frac{x^2+1}{3x^2} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to0} \frac{x^2+1}{x^2(2-\cos x)} = +\infty$$

Exercice 2

1) $f(0) = 0^2 + 3 \times 0 + 1 = 1$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{(1-\cos x)\sin 2x}{x^3} = \lim_{x\to0^-} \overbrace{\frac{1-\cos x}{x^2}}^{\frac{1}{2}} \times \overbrace{\frac{\sin 2x}{x}}^{2} = 1$$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} x^2 + 3x + 1 = 1$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to0^+} f(x) = f(0)$ alors f est continue en 0.

2) $x \mapsto 2x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$

$x \mapsto \sin 2x$ est continue sur $]-\infty, 0[$

$x \mapsto \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$

$x \mapsto (1-\cos x)\sin 2x$ est continue sur $]-\infty, 0[$

$x \mapsto \frac{1}{x^3}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en particulier sur $]-\infty\,,0[$

$x \mapsto \frac{(1-\cos x)\sin 2x}{x^3}$ est continue sur $]-\infty\,,0[$

$x \mapsto x^2+3x+1$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0\,,+\infty[$

et on a f est continue en 0 alors f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

1) a) Pour tout réel x on a : $-1 \leq \sin x \leq 1 \;\Rightarrow\; -2 \leq 2\sin x \leq 2 \;\Rightarrow\; 3x-2 \leq 3x+2\sin x \leq 3x+2$

$\Rightarrow\; 3x-2 \leq f(x) \leq 3x+2$

b) $\begin{cases} f(x) \leq 3x+2 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} 3x+2 = -\infty \end{cases} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$\begin{cases} f(x) \geq 3x-2 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} 3x-2 = +\infty \end{cases} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

2) a) On a : $g(0) = \frac{1}{5}$

$\lim\limits_{x\to0} g(x) = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{f(x)} = \lim\limits_{x\to0} \frac{x}{3x+2\sin x} = \lim\limits_{x\to0} \frac{1}{3+\underbrace{\frac{2\sin x}{x}}_{2}} = \frac{1}{5}$ alors g est continue sur en 0.

b) Pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}\,,+\infty\right[$ on a : $3x-2 \leq f(x) \leq 3x+2 \;\Rightarrow\; \frac{1}{3x+2} \leq \frac{1}{f(x)} \leq \frac{1}{3x-2}$

$\Rightarrow\; \frac{x}{3x+2} \leq \frac{x}{f(x)} \leq \frac{x}{3x-2}$ car $x>0$ $\;\Rightarrow\; \frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) $\begin{cases} \frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3x+2} = \frac{1}{3} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{3x-2} = \frac{1}{3} \end{cases} \;\Rightarrow\; \lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \frac{1}{3}$ alors la droite d'équation $y = \frac{1}{3}$ est une asymptote horizontale à la courbe de g au voisinage de $+\infty$.

Exercice 4

1) On a : $f(0) = 0+1-\sqrt{0^2+1} = 0$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} \frac{\sin x^2}{x} = \lim_{x\to0^-} \overbrace{x}^{0} \times \frac{\overbrace{\sin x^2}^{1}}{x^2} = 0$$

$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} x+1-\sqrt{x^2+1} = 0$$

$\lim\limits_{x\to0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to+} f(x) = f(0)$ alors f est continue en 0.

2) $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x+1-\sqrt{x^2+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(x+1-\sqrt{x^2+1}\right)\left(x+1+\sqrt{x^2+1}\right)}{x+1+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{(x+1)^2-(x^2+1)}{x+1+\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1+|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x+1+x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x\left(1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}\right)}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2}{1+\frac{1}{x}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1$$

3) Pour tout $x<0$ on a : $-1 \leq \sin x^2 \leq 1 \;\Rightarrow\; \frac{1}{x} \leq \frac{\sin x^2}{x} \leq -\frac{1}{x}$ car $x<0 \Rightarrow \frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x} \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0 \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{1}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$$

Exercice 5

1) * $x \mapsto 1 - x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty\,,1[$ et pour tout $x \in\,]-\infty\,,1[$ on a : $1 - x > 0$

$x \mapsto \sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty\,,1[$

$x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty\,,1[$

$x \mapsto x^2 - \sqrt{1-x}$ est continue sur $]-\infty\,,1[$

* $x \mapsto \pi x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]1\,,+\infty[$

$x \mapsto \sin(\pi x^2)$ est continue sur $]1\,,+\infty[$

$x \mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]1\,,+\infty[$

$x \mapsto x^2 + \sin(\pi x^2)$ est continue sur $]1\,,+\infty[$

alors f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$

* $f(1) = 1^2 + \sin(\pi) = 1$

$\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^-} x^2 - \sqrt{1-x} = 1$

$\lim\limits_{x\to1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} x^2 + \sin(\pi x^2) = 1$

On a : $\lim\limits_{x\to1^-} f(x) = \lim\limits_{x\to1^+} f(x) = f(1)$

alors f est continue en 1

* Conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.

2) a) $\forall x \geq 1$ on a : $-1 \leq \sin(\pi x^2) \leq 1 \Rightarrow x^2 - 1 \leq x^2 + \sin(\pi x^2) \leq x^2 + 1$

$\Rightarrow x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$

b) On a: $\forall x \geq 1$

$$\begin{cases} f(x) \geq x^2 - 1 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x^2 - 1 = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$$

3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 - \sqrt{1-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{(x^2-\sqrt{1-x})(x^2+\sqrt{1-x})}{x^2+\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4-1+x}{x^2+\sqrt{1-x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^4\left(1-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}\right)}{x^2\left(1+\frac{\sqrt{1-x}}{x^2}\right)}$

$$= \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^2\left(1-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}\right)}{1+\sqrt{\frac{1-x}{x^4}}} = +\infty$$

Exercice 6

$f([-1\,,1]) = [-1\,,1]$ $\quad$ $(f\ o\ g)(]-\infty\,,1]) = f([-1\,,0[\,) =]0\,,1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (g\ \mathrm{o}\ f)(x) = 0$ $\quad$ $\lim\limits_{x\to-\infty} (f\ \mathrm{o}\ g)(x) = 0$

Exercice 7

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \sqrt{\underbrace{3x^2 + x + 2}_{+\infty}} = +\infty$

b) Pour tout $x > 0$ on a : $-1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq -\cos x \leq 1 \Rightarrow 0 \leq 1 - \cos x \leq 2$

$\Rightarrow 0 \leq \sqrt{1-\cos x} \leq \sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq 2\sqrt{1-\cos x} \leq 2\sqrt{2} \Rightarrow 0 \leq \frac{2\sqrt{1-\cos x}}{x} \leq \frac{2\sqrt{2}}{x}$ car $x > 0$

$\Rightarrow 0 \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{2}}{x}$

$$\begin{cases} 0 \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{2}}{x} \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{2\sqrt{2}}{x} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$$

2)

* $x \mapsto 3x^2 + x + 2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty, 0[$ et pour tout $x \in]-\infty, 0[$

$3x^2 + x + 2 > 0$ car $\Delta < 0$

* $x \mapsto 1 - \cos x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0, +\infty]$ et pour tout $x \in]0, +\infty]$;

$0 \leq 1 - \cos x \leq 2 \Rightarrow 1 - \cos x \geq 0$

$x \mapsto 2\sqrt{1-\cos x}$ est continue sur $]0, +\infty]$

$x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ en particulier sur $]0, +\infty]$

$x \mapsto \frac{2\sqrt{1-\cos x}}{x}$ est continue sur $]0, +\infty]$

alors f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$

* $f(0) = \sqrt{3x^2 + x + 2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-0^+} \frac{2\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim\limits_{x\to-0^+} 2\frac{\sqrt{1-\cos x}}{x} = \lim\limits_{x\to-0^+} 2\sqrt{\frac{1-\cos x}{x^2}} = 2 \times \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

$\lim\limits_{x\to-0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-0^-} \sqrt{3x^2 + x + 2} = 0$

$\lim\limits_{x\to-0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to-0^+} f(x) = f(0)$ alors f est continue en 0

* Conclusion f est continue sur $\mathbb{R}$.

<u>Exercice 8</u>

1) $x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^2}{x+1} \geq 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 1 > 0 \\ x + 1 \neq 0 \end{cases}$ alors $D_f =]-1, +\infty[$

2) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x) = \lim\limits_{x\to-1^+} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{\frac{x^2}{x+1}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{|x|}{\sqrt{x+1}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\frac{x}{\sqrt{x+1}}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\frac{x^2}{x+1}} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} - x = -\infty$

3) $x \mapsto \frac{x^2}{x+1}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ en particulier sur $]-1, +\infty[$ et pour tout $x \in]-1, +\infty[$; $\frac{x^2}{x+1} > 0$

$x \mapsto \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$ est sur $]-1, +\infty[$ alors f est continue sur $]-1, +\infty[$

Exercice 9

1) $f(0)=\sqrt{0^2-3\times 0}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-}\sqrt{x^2-3x}=0$

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{3}{2}x^2+\sin x^2=0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=f(0)$ alors f est continue en 0.

2) $x\mapsto x^2-3x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]-\infty\,,0[$

$x^2-3x=x(x-3)\,;\,x^2-3x=0\;\;x=0$ ou $x=3$

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
x^2-3x		$+$		$-$		$+$	

et pour tout $x\in\,]-\infty\,,0[$ on a : $x^2-3x>0$

$x\mapsto\sqrt{x^2-3x}$ est continue sur $]-\infty\,,0[$ alors f est continue sur $]-\infty\,,0[$

3) a) On a : $\forall x>0\;\;u(x)=x^2$ et $v(x)=\sin(x^2)$

alors $v(x)=\sin\big(u(x)\big)$

b) $x\mapsto x^2$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0\,,+\infty[$ alors $x\mapsto u(x)$ est continue sur $]0\,,+\infty[$

$x\mapsto\sin\big(u(x)\big)$ est continue sur $]0\,,+\infty[$

alors f est continue sur $]0\,,+\infty[$

4) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\sqrt{\underbrace{x^2-3x}_{+\infty}}=+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\sqrt{x^2-3x}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}}{x}=\lim_{x\to-\infty}-\sqrt{1-\frac{3}{x}}=-1$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)+x=\lim_{x\to-\infty}\sqrt{x^2-3x}+x=\lim_{x\to-\infty}\frac{\left(\sqrt{x^2-3x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-3x}-x\right)}{\sqrt{x^2-3x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{\sqrt{x^2-3x}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{|x|\sqrt{1-\frac{3}{x}}-x}$$

$$=\lim_{x\to-\infty}\frac{-3x}{-x\sqrt{1-\frac{3}{x}}-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{3}{\sqrt{1-\frac{3}{x}}+1}=\frac{3}{2}$$

5) a) On a : $\forall x>0\;\;-1\le\sin x^2\le 1\;\Rightarrow\;\frac{3}{2}x^2-1\le\frac{3}{2}x^2+\sin x^2\le\frac{3}{2}x^2+1\Rightarrow f(x)\ge\frac{3}{2}x^2-1$

b) $\begin{cases} f(x)\ge\frac{3}{2}x^2-1\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{2}x^2-1=+\infty\end{cases}\;\Rightarrow\;\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$

Exercice 10

1) $f(-1)=4\,;\,f(-2)=3\,;\;g(3)=1\,;\;g(4)=0\,;\;\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2\,;\;\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=+\infty$

2) $f([-2\,,-1])=[3\,,4]$ et $g([3\,,4])=[0\,,1]$ alors $(g\circ f)([-2\,,-1])=[0\,,1]$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=2^+$ et $\lim\limits_{x\to 2^+} g(x)=+\infty$ alors $\lim\limits_{x\to-\infty}(g\circ f)(x)=+\infty$

3) a) On a : f est strictement croissante sur $]-\infty\,,-1]$

alors pour tout réels a et b tel que $a < b \leq -1$ on a :

$f(a) < f(b)$ et $f(]-\infty\,,-1]) =]2\,,4]$ et g est strictement décroissante sur $]2\,,4]$

alors $g\big(f(a)\big) > g\big(f(b)\big)$ alors $(g \circ f)(a) > (g \circ f)(b)$

b) Pour tout réels a et b tel que $a < b \leq -1$ on a : $(g \circ f)(a) > (g \circ f)(b)$

alors la fonction $g \circ f$ est strictement décroissante sur $]-\infty\,,-1]$

4) On a : $g \circ f$ est continue et strictement décroissante sur $]-\infty\,,-1]$ et $(g \circ f)([-2\,,-1]) = [0\,,1]$

or $\frac{1}{2} \in [0\,,1]$ alors l'équation $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]-2\,,-1[$

Exercice 11

1) a) Pour tout $x \in]0\,,1[$ on a : $-1 \leq \sin\frac{\pi}{x} \leq 1 \Rightarrow -\sqrt{x} \leq \sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x} \leq \sqrt{x}$

$\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq \frac{\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}}{x-1} \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$ car $x-1<0$ $\Rightarrow \frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

b) $f(0) = \sqrt{0^2 - 2\times 0} + 0 = 0$

On a $\forall x \in]0\,,1[\,;\ \frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

$$\begin{cases} \frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1} \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x-1} = 0 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} -\frac{\sqrt{x}}{x-1} = 0 \end{cases} \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} f(x) = 0$$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^-} \sqrt{x^2-2x} + x = 0$

$\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = f(0)$ alors f est continue en 0

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x\sin\frac{\pi}{x}}{x-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \overbrace{\frac{x}{x-1}}^{1}\overbrace{\sin\frac{\pi}{x}}^{0} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \sqrt{x^2-2x} + x = \lim_{x\to-\infty} \frac{\left(\sqrt{x^2-2x}+x\right)\left(\sqrt{x^2-2x}-x\right)}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{|x|\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{-2x}{-x\sqrt{1-\frac{2}{x}}-x} = \lim_{x\to-\infty} \frac{2}{\sqrt{1-\frac{2}{x}}+1} = 1$$

2) a) $u(x) = \frac{\pi(x-1)}{x}$ $\quad v(x) = \frac{\sin x}{x}$ $\quad et \quad w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$

On a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}\,;\ (v \circ u)(x) = v\big(u(x)\big) = \frac{\sin u(x)}{u(x)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi(x-1)}{x}\right)}{\frac{\pi(x-1)}{x}} = \frac{\sin\left(\pi-\frac{\pi}{x}\right)}{\frac{\pi(x-1)}{x}} = \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi(x-1)}{x}}$

$w(x) \times (v \circ u)(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}} \times \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi(x-1)}{x}} = \frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{x-1}{\sqrt{x}}} = \frac{\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}}{x-1} = f(x)$

b) $\lim\limits_{x\to 1} u(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\pi(x-1)}{x} = 0$ d'où $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sin u(x)}{u(x)} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to 1} (v \circ u)(x) = 1$

$\lim\limits_{x\to 1} w(x) = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\pi}{\sqrt{x}} = \pi$ alors $\lim\limits_{x\to 1} w(x) \times (v \circ u)(x) = \pi$

par suite $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \pi$ alors f admet un prolongement par continuité en 1 définie par la fonction φ tel que

$\begin{cases} \varphi(x) = f(x) \text{ si } x \in]0\,,1[\,\cup\,]1\,,+\infty[\\ \varphi(1) = \pi \end{cases}$

Exercice 12

1)

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0^-$ car pour tout $x \geq 2$; $f(x) - (x-2) \leq 0$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{f(x)-(x-2)} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{f(x)-x+2} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) - 1 = 0^-$ car pour tout $x \leq -2$; $f(x) - 1 \leq 0$

alors $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{-1}{f(x)-1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{-1}{f(x)-x+2} = +\infty$

* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-2) = 0^-$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + 2 = 0^-$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} -f(x) + x - 2 = 0^+$

alors $\lim\limits_{x\to+\infty} \big(x - f(x)\big) = 2^+$ et $\lim\limits_{x\to2^+} f(x) = -1$ alors $\lim\limits_{x\to+\infty} f\big(x - f(x)\big) = -1$

2) a) $(f\ o\ f)(x) = f(f(x))$

$x \in D_{fof} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ f(x) \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 0 \\ x \neq -2 \\ x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases} \Leftrightarrow D_{fof} = \mathbb{R}\backslash\{-2\,,0\,,1\,,2\}$

b) $(f\ o\ f)(x) \leq -1 \Rightarrow f(f(x)) \leq -1 \Rightarrow -1 \leq f(x) < 0 \Rightarrow -2 < x \leq -1$ ou $x = 2$

$S_{\mathbb{R}} =]-2\,,-1] \cup \{2\}$

3) a) $x \mapsto -x$ est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier sur $]0\,,\pi[$

$x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ est continue sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi\}$; $k \in \mathbb{Z}$ en particulier sur $]0\,,\pi[$

$x \mapsto \frac{-x}{\sin x}$ est continue sur $]0\,,\pi[$

$x \mapsto f\left(\frac{-x}{\sin x}\right)$ est continue sur $]0\,,\pi[$ alors g est continue sur $]0\,,\pi[$

$\lim\limits_{x\to0^+} \frac{-x}{\sin x} = \lim\limits_{x\to0^+} -\frac{1}{\frac{\sin x}{x}} = -1$ or $\lim\limits_{x\to-1} f(x) = 0$ alors $\lim\limits_{x\to0^+} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) = -1$

alors $\lim\limits_{x\to0^+} g(x) = -1 = g(0)$ alors g est continue à droite en 0

$\lim\limits_{x\to\pi^-} \frac{\overbrace{-x}^{-\pi}}{\underbrace{\sin x}_{0^+}} = -\infty$ or $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ alors $\lim\limits_{x\to\pi^-} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) = 1$

alors $\lim\limits_{x\to\pi^-} g(x) = 1 = g(\pi)$ alors g est continue à gauche en π

conclusion g est continue sur $]0\,,\pi[$ et continue à droite en 0 et continue à gauche en π

alors g est continue sur $[0\,,\pi]$

b) Soit la fonction h définie sur $[0\,,\pi]$ par $h(x) = g(x) - (x-2)$ or g est continue sur $[0\,,\pi]$ alors h est continue sur $[0\,,\pi]$; $h(0) = g(0) + 2 = 1$ et $h(\pi) = g(\pi) - (\pi - 2) = 1 - \pi + 2 = 1 - \pi$

on a $h(0) \times h(\pi) < 0$ alors l'équation $h(x) = 0$ admet une solution dans $[0\,,\pi]$ par suite $g(x) = x - 2$ admet une solution dans $[0\,,\pi]$.