Dans tous les exercices le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 1

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{1}{2-\cos x}$

1) Montrer que pour tout réel x : $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1$

2) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x(2-\cos x)}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x^2+1}{2-\cos x}$ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2+1}{x^2(2-\cos x)}$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \frac{(1-\cos x)\sin 2x}{x^3} & \text{si } x < 0 \\ f(x) = x^2 + 3x + 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 3x + 2\sin x$

1) **a)** Montrer que pour tout réel x : $3x - 2 \leq f(x) \leq 3x + 2$

b) En déduire les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

2) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = \begin{cases} \frac{x}{f(x)} & \text{si } x \neq 0 \\ \frac{1}{5} & \text{si } x = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur en 0

b) Montrer que pour tout $x \in \left]\frac{2}{3}, +\infty\right[$ on a : $\frac{x}{3x+2} \leq g(x) \leq \frac{x}{3x-2}$

c) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenue

Exercice 4

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x + 1 - \sqrt{x^2+1} & \text{si } x \geq 0 \\ f(x) = \frac{\sin x^2}{x} & \text{si } x < 0 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue en 0.

2) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

3) Montrer que $\forall x < 0$ on a : $\frac{1}{x} \leq f(x) \leq -\frac{1}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

Exercice 5

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = x^2 - \sqrt{1-x} & \text{si } x < 1 \\ f(x) = x^2 + \sin(\pi x^2) & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$

1) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

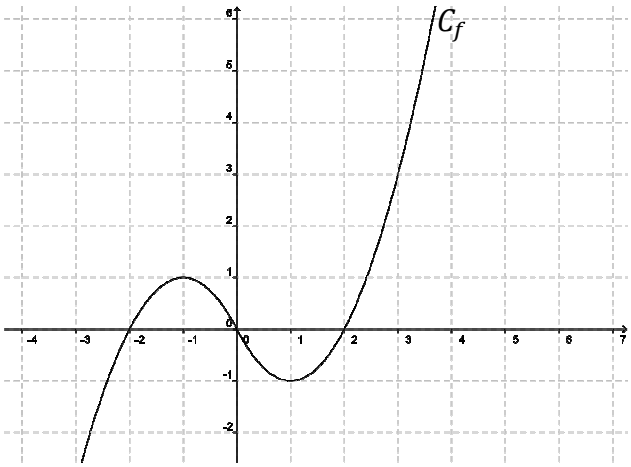
2) **a)** Montrer que $\forall x \geq 1$ on a : $x^2 - 1 \leq f(x) \leq x^2 + 1$

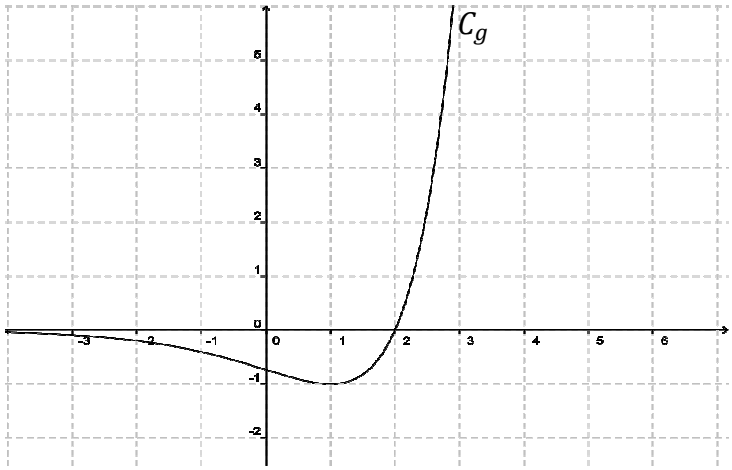
b) En déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$.

Exercice 6

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci- dessous représentées.





La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote à la courbe C_g

Déterminer graphiquement $f([-1\,,1])$ $(f \circ g)(]-\infty\,,1])$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (g \circ f)(x)$ $\lim\limits_{x \to -\infty} (f \circ g)(x)$

Exercice 7

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{3x^2 + x + 2} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{2\sqrt{1-\cos x}}{x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$

1) **a)** Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$

b) Montrer que pour $x > 0$ on a : $0 \leq f(x) \leq \frac{2\sqrt{2}}{x}$ et en déduire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8

On considère la fonction f définie par : $f(x) = \sqrt{\frac{x^2}{x+1}}$

1) Préciser le domaine de définition de f.

2) Calculer $\lim\limits_{x \to -1^+} f(x)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - x$

3) Montrer que f est continue sur $]-1\,,+\infty[$.

Exercice 9

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 - 3x} & \text{si } x \leq 0 \\ f(x) = \frac{3}{2}x^2 + \sin x^2 & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et soit C_f sa courbe représentative

1) Etudier la continuité de f en 0.

2) Montrer que f est continue sur $]-\infty\,,0[$

3) On pose $\forall x > 0$ $u(x) = x^2$ et $v(x) = \sin(x^2)$.

a) Ecrire v sous la forme d'une fonction composée.

b) En déduire que f est continue sur $]0\,,+\infty[$

4) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) + x$

5) a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $f(x) \geq \frac{3}{2}x^2 - 1$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

Exercice 10

On considère deux fonctions f et g définies par leurs courbes C_f et C_g ci- dessous représentées.

La fonction f est définie sur $]-\infty\,,-1]$ et la fonction g est définie sur $]2\,,4]$.

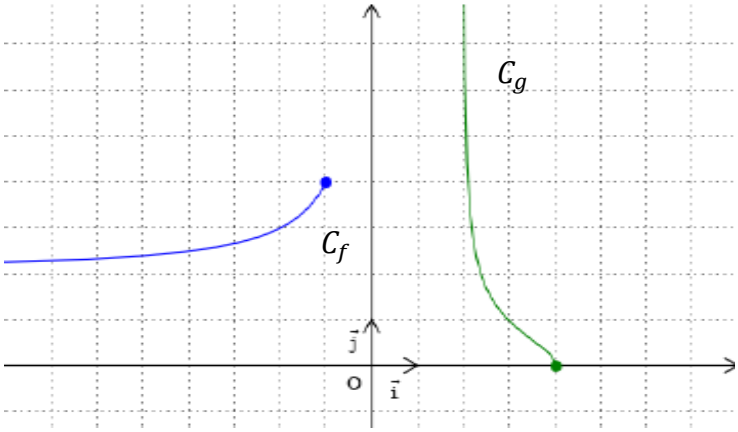
1) Donner graphiquement : $f(-1)$ $f(-2)$ $g(3)$ $g(4)$ $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ $\lim\limits_{x\to2^+} g(x)$

2) Déterminer $(g \circ f)([-2\,,-1])$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} (g \circ f)(x)$.

3) a) Montrer que pour tout réels a et b tel que $a < b \leq -1$ on a : $(g \circ f)(a) > (g \circ f)(b)$

b) En déduire le sens de variation de $g \circ f$ sur $]-\infty\,,-1]$.

4) Montrer que l'équation $(g \circ f)(x) = \frac{1}{2}$ admet une solution unique α dans $]-2\,,-1[$



Exercice 11

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ par : $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{x}\sin\frac{\pi}{x}}{x-1} & \text{si } x \in]0\,,1[\cup]1\,,+\infty[\\ f(x) = \sqrt{x^2 - 2x} + x & \text{si } x \in]-\infty\,,0] \end{cases}$

1) a) Montrer que : $\forall x \in]0\,,1[$ on a : $\frac{\sqrt{x}}{x-1} \leq f(x) \leq -\frac{\sqrt{x}}{x-1}$

b) Montrer que f est continue en 0.

c) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{x}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

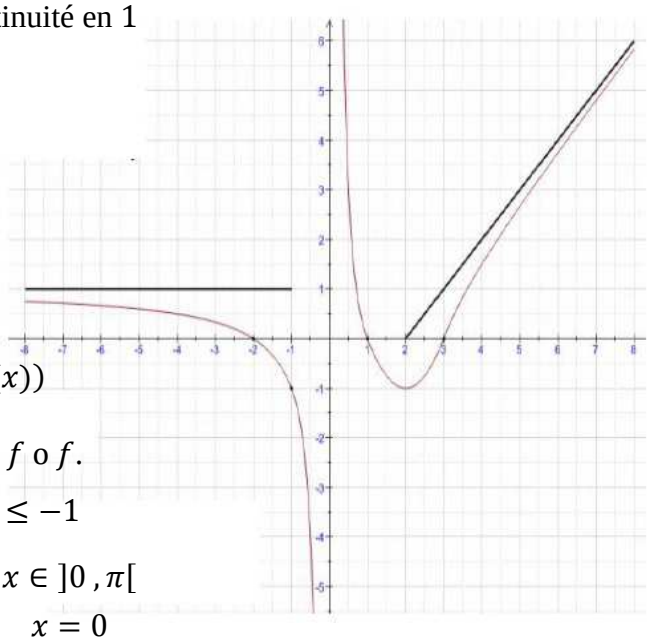
2) Soit les fonctions u, v et w définies sur $\mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ par

$$u(x) = \frac{\pi(x-1)}{x} \qquad v(x) = \frac{\sin x}{x} \quad et \quad w(x) = \frac{\pi}{\sqrt{x}}$$

a) Vérifier que : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*\backslash\{1\}$ on a : $f(x) = w(x) \times (v \circ u)(x)$

b) En déduire que f admet un prolongement par continuité en 1

Exercice 12



La courbe ci-contre est celle d'une fonction f définie et continue sur $\mathbb{R}^*$. Les droites d'équations : $y = 1$, $x = 0$ et $y = x - 2$ sont des asymptotes à C_f.

1) Par lecture graphique calculer :

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{-1}{f(x) - x + 2} \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(x) - 1} \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x - f(x))$$

2) **a)** Déterminer l'ensemble de définition de la fonction $f \circ f$.

b) Résoudre graphiquement l'inéquation : $(f \circ f)(x) \leq -1$

3) Soit la fonction g définie par : $g(x) = \begin{cases} f\left(\frac{-x}{\sin x}\right) & si \;\; x \in]0\,,\pi[\\ -1 & si \quad x = 0 \\ 1 & si \quad x = \pi \end{cases}$

a) Montrer que g est continue sur $[0\,,\pi]$.

b) Montrer que l'équation $g(x) = x - 2$ admet dans $[0\,,\pi]$ au moins une solution.