REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◈◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2014**	Correction de l'épreuve de **MATHEMATIQUES** Durée : **3 H** Coefficient : **3**
Section : **Sciences techniques**	**SESSION PRINCIPALE**

Exercice 1 : (3 points)

1) b) en effet $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{1+2^n}{3+2^n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\cancel{2^n}\left(\frac{1}{2^n}+1\right)}{\cancel{2^n}\left(\frac{3}{2^n}+1\right)}=1$

2) a) en effet $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{e-1}{e}\right)^n=0$ car $\frac{e-1}{e}\in\left]0,1\right[$

3) c) en effet $p(X>10)=e^{-0,2\times10}=0,14$

4) a) en effet $\sigma(Y)=\sqrt{8\times\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}}=\sqrt{\frac{16}{9}}=\frac{4}{3}$

Exercice 2 : (5 points)

1) a) $(E):2z^2-\left(1+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right)z+\sqrt{3}-i=$

$2(-i)^2-\left(1+i\left(\sqrt{3}-2\right)\right)(-i)+\sqrt{3}-i=-2+i-\sqrt{3}+2+\sqrt{3}-i=0$ donc (i) est une solution de (E).

b) soit z_1 et z_2 les solutions de (E). on a $z_1=-i$ et

$z_1z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{2}\Leftrightarrow -iz_2=\frac{\sqrt{3}-i}{2}\Leftrightarrow z_2=\frac{\sqrt{3}-i}{-2i}=\frac{\sqrt{3}}{-2i}+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$

c) $z_1=-i=e^{-i\frac{\pi}{2}}$ et $z_2=\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

2) $z_A=a=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $z_B=b=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)$, $z_E=1$ et $z_F=-i$

a) $a=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=e^{i\frac{\pi}{3}}$

b) $b-a=\frac{1+\sqrt{3}}{2}(-1+i)-\frac{1+i\sqrt{3}}{2}=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+i\frac{1+\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i+i\frac{\sqrt{3}}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}=-1-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i$

$i(a+i)=ia-1=\frac{1}{2}i-\frac{\sqrt{3}}{2}-1$ d'où $b-a=i(a+i)$

c) $b-a=i(a+i)\Leftrightarrow\frac{b-a}{a+i}=i\Leftrightarrow\frac{z_B-z_A}{z_A-z_F}=i$ ainsi $\frac{z_{\overrightarrow{AB}}}{z_{\overrightarrow{FA}}}=i$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{FA}$ ainsi ABF est rectangle en A

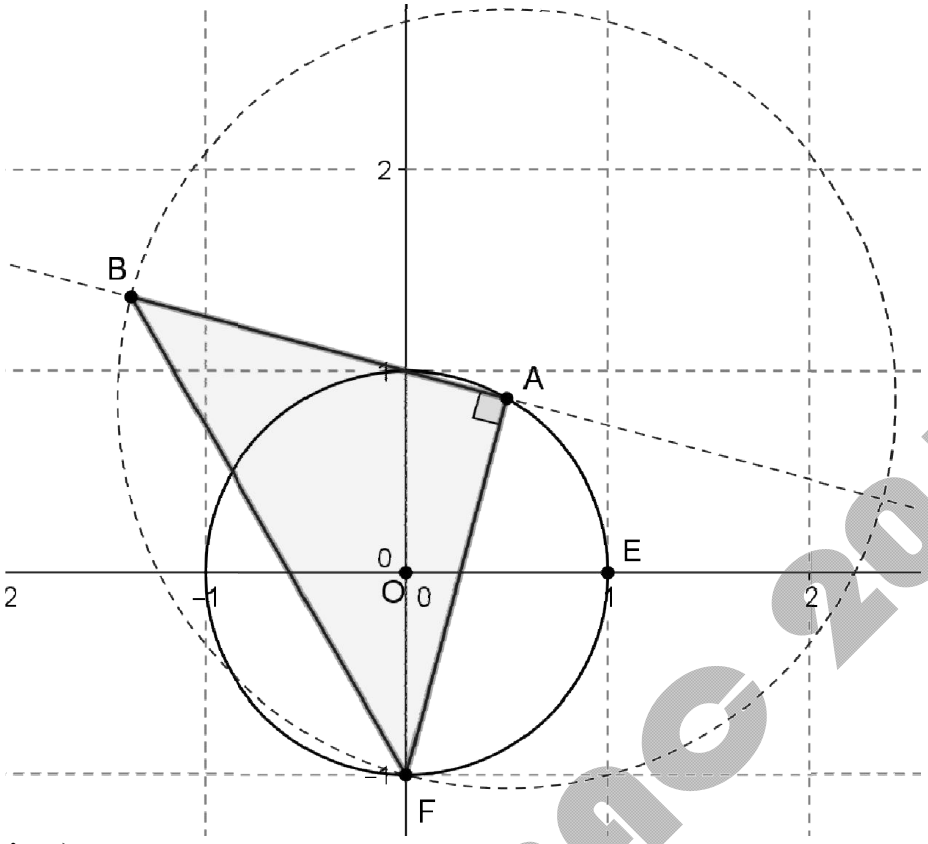
$\left|\frac{z_B-z_A}{z_A-z_F}\right|=|i|\Leftrightarrow\frac{|z_B-z_A|}{|z_A-z_F|}=1\Leftrightarrow AB=FA$ donc ABF est isocèle en A. Par le triangle AFB est rectangle et isocèle en A

3) ABF est un triangle rectangle et isocèle en A et $\frac{z_B-z_A}{z_A-z_F}=i\Leftrightarrow\arg\left(\frac{z_B-z_A}{z_A-z_F}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]\Leftrightarrow\left(\widehat{\overrightarrow{FA},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$

Donc $\left(\widehat{\overrightarrow{AF},\overrightarrow{AB}}\right)\equiv-\frac{\pi}{2}[2\pi]$

BERREZIG - BAC 2014

Proposé par : Mr Abderrazek Berrezig – Lycée Assad Ibn Alfourat Oued Ellil



Exercice 3 : (6 points)

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\neq\vec{0}$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite les points A, B et C non alignés donc ils déterminent un plan P de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$

$P:-2x-2y-2z+d=0$ et comme A(2,0,1) est un point de P donc

$-2\times2-2\times0-2\times1+d=0\Leftrightarrow-6+d=0\Leftrightarrow d=6$ ainsi $P:-2x-2y-2z+6=0$ ou $P:x+y+z-3=0$

2) $S:x^2+y^2+z^2=5$

a) $2^2+0^2+1^2=4+1=5$ donc $A\in S$; $0^2+2^2+1^2=4+1=5$ donc $B\in S$ et $1^2+2^2+0^2=1+4=5$ donc $C\in S$

b) $\{A,B,C\}\in S\cap P$ et A, B et C sont trois points distincts donc l'intersection de la sphère S avec le plan P est le cercle circonscrit au triangle ABC.

3) $D\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$

a) Q parallèle au plan P donc $Q:x+y+z+d'=0$ et comme $D\left(\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}},\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\in Q$ donc

$\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{\frac{5}{3}}+\sqrt{\frac{5}{3}}+d'=0\Leftrightarrow d'=-3\sqrt{\frac{5}{3}}=-\sqrt{15}$ d'où $Q:x+y+z-\sqrt{15}=0$

b) S est la sphère de centre O et de rayon $R=\sqrt{5}$

BERREZIG - BAC 2014

$$d(O,Q)=\frac{\left|0+0+0-\sqrt{15}\right|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{3}}=\sqrt{5}$$ donc Q est tangent à S

Montrons que $D\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\,,\sqrt{\frac{5}{3}}\,,\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\in S$

$$S:\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2+\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^2=\frac{5}{3}+\frac{5}{3}+\frac{5}{3}=\frac{15}{3}=5$$ donc $D\in S$

Et par suite $\{D\}=S\cap Q$ d'où Q est tangent à S au point D.

4) a) $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-2\\y\\z-1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-2\\-2\\-2\end{pmatrix}$ donc $\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}=-2(x-2)-2y-2(z-1)=-2x-2y-2z+6$

b) $V=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AC}\right).\overrightarrow{AM}\right|=\frac{\left|-2x-2y-2z+6\right|}{6}=\frac{2\left|x+y+z-3\right|}{6}=\frac{\left|x+y+z-3\right|}{3}$

c) M est un point du plan Q donc $x+y+z-\sqrt{15}=0\Leftrightarrow x+y+z=\sqrt{15}$

Ainsi $V=\frac{\left|x+y+z-3\right|}{3}=\frac{\left|\sqrt{15}-3\right|}{3}=\frac{\sqrt{15}-3}{3}=\frac{\sqrt{15}}{3}-1=\sqrt{\frac{5}{3}}-1$

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0\,,\,+\infty[$ par $\begin{cases}f(x)=x(1-\ln x)^2 & \text{si } x>0\\ f(0)=1\end{cases}$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}x(1-\ln x)^2+1=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x(1-\ln x)^2+1}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}(1-\ln x)^2+\frac{1}{x}=+\infty$

donc la courbe ζ de f admet au voisinage de $+\infty$, une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

2) a) $\lim\limits_{x\to0^+}x\ln^2 x=\lim\limits_{x\to0^+}\left(\sqrt{x}\ln x\right)^2=0$

b) $\lim\limits_{x\to0^+}f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}x(1-\ln x)^2+1=\lim\limits_{x\to0^+}x\left(1-2\ln x+\ln^2 x\right)+1=\lim\limits_{x\to0^+}x-2x\ln x+x\ln^2 x+1=1=f(0)$

d'où f est continue à droite en 0.

c) $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\limits_{x\to0^+}\frac{x(1-\ln x)^2+1-1}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}(1-\ln x)^2=+\infty$ donc n'est pas dérivable à droite en 0 et la courbe ζ de f admet une demi-tangent verticale dirigée vers le haut au point d'abscisse 0.

3) a)

x	0		$\frac{1}{e}$		e		$+\infty$
$f'(x)$	|	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↗	$\frac{4}{e}+1$	↘	1	↗	$+\infty$

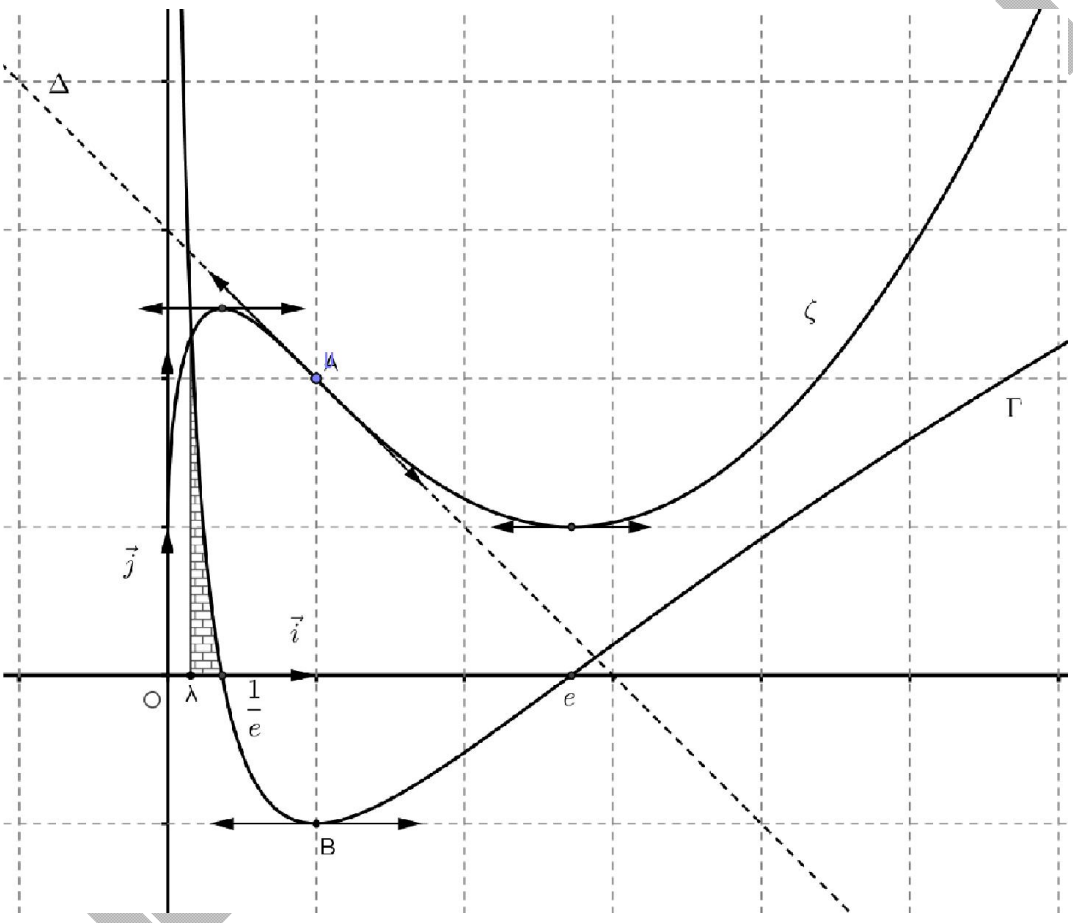
BERREZIG - BAC 2014

b) la fonction f' est dérivable sur $]0,+\infty[$ de plus la courbe Γ de f' admet au point B(1,-1) une tangente horizontale donc $f''(1)=0$

x	$\frac{1}{e}$		1		e
f '(x)		↘	-1	↗	
f "(x)		+	0	−	

Ainsi le point A (1 ,2) est un point d'inflexion de la courbe ζ

4)



5) $A_\lambda = \int_\lambda^{\frac{1}{e}} f'(x)dx = [f(x)]_\lambda^{\frac{1}{e}} = f\left(\frac{1}{e}\right) - f(\lambda) = 1 + \frac{4}{e} - f(\lambda)$

$\lim_{\lambda \to 0^+} A_\lambda = \lim_{\lambda \to 0^+} 1 + \frac{4}{e} - f(\lambda) = 1 + \frac{4}{e} - -1 = \frac{4}{e}$