REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◈◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2014**	Correction de l'épreuve de **MATHEMATIQUES** Durée : **3 H** Coefficient : **3**
Section **: Sciences expérimentales**	**SESSION PRINCIPALE**

Exercice 1 : (5 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}$

1) a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}=0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{1+e^{x}}=+\infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{e^{-x}}{x\left(1+e^{x}\right)}=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1}{xe^{x}+xe^{2x}}=-\infty$

donc la courbe C_f de f admet au voisinage de $-\infty$, une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$

2) a) f est dérivable sur IR et pour tout réel x , $f'(x)=\dfrac{-e^{-x}\left(1+e^{x}\right)-e^{-x}e^{x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=\dfrac{-e^{-x}-1-1}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}=-\dfrac{2+e^{-x}}{\left(1+e^{x}\right)^{2}}$

b)

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$-$
$f(x)$	$+\infty$ $\searrow$ 0

3) a) La tangente (T) au point d'abscisse 0 a pour équation : $y=f'(0)(x-0)+f(0)=-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}$

b) la positon relative de Cf et (T) est donnée par les signe de la fonction

$g(x)=f(x)-\left(-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}\right)=f(x)+\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$ g est dérivable sur IR et $g'(x)=f'(x)+\dfrac{3}{4}$

D'après le tableau donné :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\searrow$	0	$\nearrow$

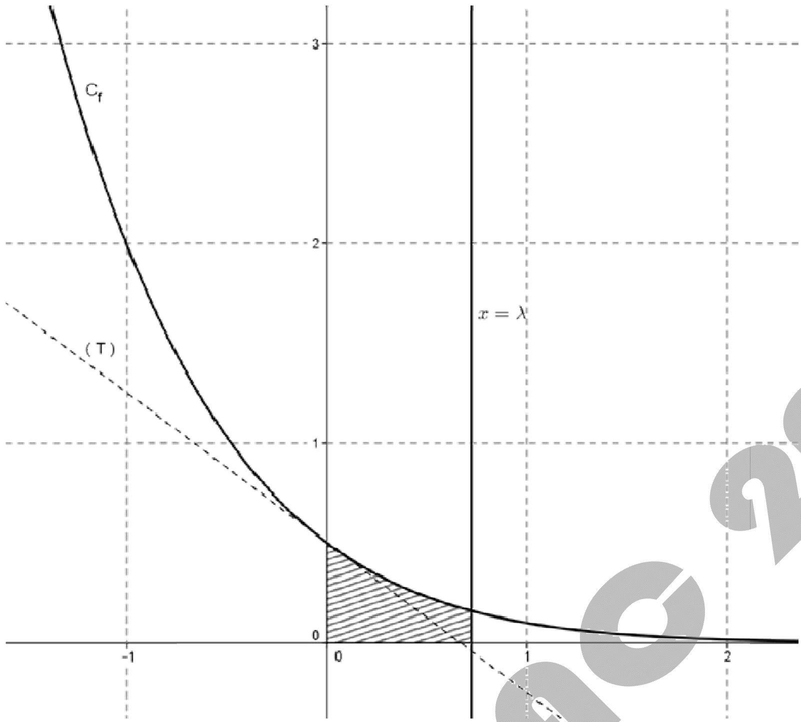
Ainsi $g(x)=f(x)-\left(-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{2}\right)>0$ pour tout $x\in IR^*$ donc C_f est au dessus de (T).

c) $e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}=e^{-x}-\dfrac{\frac{1}{e^{x}}}{1+\frac{1}{e^{x}}}=e^{-x}-\dfrac{\frac{1}{e^{x}}}{\frac{e^{x}+1}{e^{x}}}=e^{-x}-\dfrac{1}{e^{x}+1}=\dfrac{e^{-x}\left(e^{x}+1\right)-1}{e^{x}+1}=\dfrac{e^{-x}+1-1}{e^{x}+1}=f(x)$

b) $A_\lambda=\int_0^\lambda f(x)dx=\int_0^\lambda e^{-x}-\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx==\int_0^\lambda e^{-x}dx-\int_0^\lambda\dfrac{e^{-x}}{1+e^{-x}}dx=\left[-e^{-x}\right]_0^\lambda-\left[-\ln\left|1+e^{-x}\right|\right]_0^\lambda$

$A_\lambda=\left[-e^{-x}\right]_0^\lambda-\left[-\ln\left|1+e^{-x}\right|\right]_0^\lambda=-e^{-\lambda}+1-\left(-\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)+\ln 2\right)=-e^{-\lambda}+\ln\left(1+e^{-\lambda}\right)+1-\ln 2$ ua

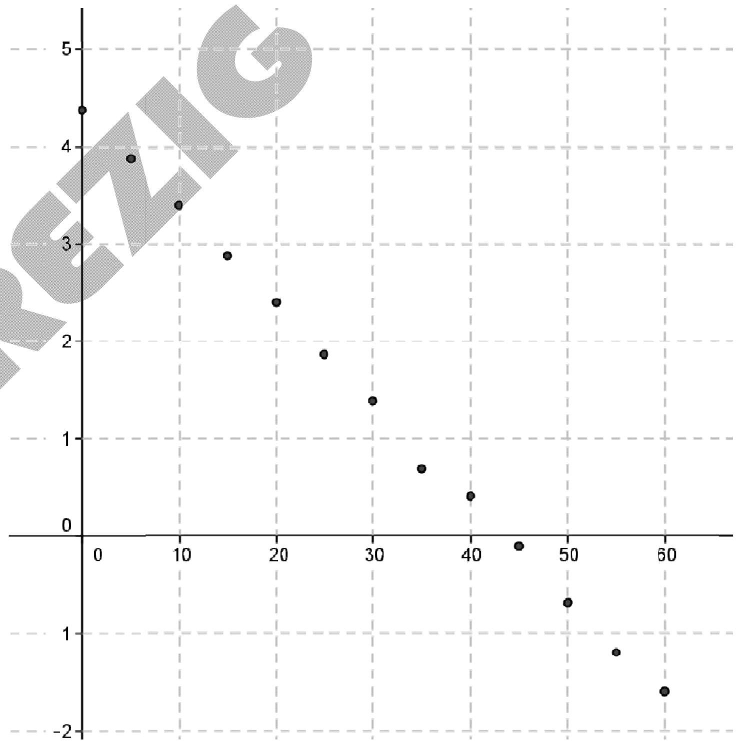
c) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} A_\lambda = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} -e^{-\lambda} + \ln\left(1+e^{-\lambda}\right) + 1 - \ln 2 = 1 - \ln 2$ car $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} e^{-\lambda} = 0$



Exercice 2 : (4 points)

1) a)

t (en mn)	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60
θ	4,38	3,88	3,40	2,88	2,40	1,87	1,39	0,69	0,41	-0,10	-0,69	-1,2	-1,60



b) $r = \dfrac{\text{cov}(t,\theta)}{\sigma_t \sigma_\theta} \simeq -0{,}999$ il y a forte corrélation de la série (t , θ) donc un ajustement affine est justifier

2) a) Une équation de la droite de régression de θ en t est $\theta = a\,t + b$ avec $a = \dfrac{\text{cov}(t,\theta)}{V(t)} = -0{,}10$

$b = \bar{\theta} - \dfrac{\text{cov}(t,\theta)}{V(t)}\bar{t} = 4,39$ donc $\theta = -0,10\,t + 4,39$

b) $\ln(T-20) = \theta \Leftrightarrow \ln(T-20) = -0,10\,t + 4,39 \Leftrightarrow T - 20 = e^{-0,10\,t+4,39} \Leftrightarrow T = 20 + e^{-0,10\,t}e^{4,39}$

Ainsi $T = 20 + \alpha e^{\beta\,t}$ avec $\alpha = e^{4,39} \simeq 80,6$ et $\beta = -0,1$ donc $T = 20 + 80,6\,e^{-0,1\,t}$

c) $t = 90$ mn donc $T = 20 + 80,6\,e^{-0,1\times 90} = 20,009$ °C

d) Non en effet $T = 20 + 80,6\,e^{-0,1\,t}$ la température de cette tasse va se stabiliser autour de la température ambiante du salon qui est 20°C

Exercice 3 : (5 points)

1) a) $S: x^2 + y^2 + z^2 - 8 = 0$

$S: x^2 + y^2 + z^2 = 8 = \left(2\sqrt{2}\right)^2$

Le centre de S est l'origine O de repère et le rayon $R = 2\sqrt{2}$

b) $d(O,P) = \dfrac{|0 + 2\times 0 + 0 - 6|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 1^2}} = \dfrac{6}{\sqrt{6}} = \sqrt{6} < R$ donc P coupe S suivant un cercle (𝒞) de rayon

$r = \sqrt{R^2 - \left(d(O,P)\right)^2} = \sqrt{8-6} = \sqrt{2}$ et de centre H le projeté orthogonal de O sur P

Donc $\begin{cases} H(x,y,z) \in P \\ \overrightarrow{OH} = \alpha\,\overrightarrow{n_p} \quad \alpha \in IR \end{cases}$ avec $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ le vecteur normal à P Ainsi $\begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ x = \alpha \\ y = 2\alpha \quad \alpha \in IR \\ z = \alpha \end{cases}$

On remplace x, y et z dans l'équation de P on obtient $\alpha + 4\alpha + \alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow 6\alpha - 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1$

D'où $H(1,2,1)$

2) a) $A(2,0,2)$; $2^2 + 0^2 + 2^2 - 8 = 8 - 8 = 0$ donc $A \in S$

$2 + 2\times 0 + 2 - 6 = 4 - 6 = 2 \neq 0$ donc $A \notin P$.

Pour montrer que B appartient au cercle (𝒞) il suffit de vérifier que B appartient P et à S

$B(2,2,0)$; $2^2 + 2^2 + 0^2 - 8 = 8 - 8 = 0$ donc $B \in S$

$2 + 2\times 2 + 0 - 6 = 6 - 6 = 0$ donc $B \in P$.

b) $Q = \{M(x,y,z)$ tels que $MA = MB\}$

1^{er} **Méthode** : Q est le plan médiateur du segment [AB] donc de vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}0\\2\\-2\end{pmatrix}$ et passe par le milieu de [AB] de coordonnées $(2,1,1)$.

$2^{ème}$ **Méthode** : $M(x,y,z) \in Q \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow \sqrt{(2-x)^2 + (0-y)^2 + (2-z)^2} = \sqrt{(2-x)^2 + (2-y)^2 + (0-z)^2}$

$\Leftrightarrow (2-x)^2 + (0-y)^2 + (2-z)^2 = (2-x)^2 + (2-y)^2 + (0-z)^2 \Leftrightarrow y^2 + 4 - 4z + z^2 = 4 - 4y + y^2 + z^2$

$\Leftrightarrow -4z = -4y \Leftrightarrow y - z = 0$ c'est l'équation cartésienne d'un plan ainsi Q est le plan d'équation $y = z$

b) $P: x + 2y + z - 6 = 0$ et $Q: y - z = 0$ de vecteurs normaux $\overrightarrow{n_P}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{n_Q}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$ on a : $\dfrac{0}{1} \neq \dfrac{1}{2}$ donc $\overrightarrow{n_P}$ et $\overrightarrow{n_Q}$ ne sont pas colinéaires et Par suite P et Q se coupe selon une droite Δ.

$M(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y + z - 6 = 0 \\ y = z \end{cases}$ on pose $z = \alpha$, $\alpha \in IR$

$M(x,y,z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} z = \alpha \\ y = \alpha \\ x = 6 - 3\alpha \end{cases} \alpha \in IR \Leftrightarrow \begin{cases} x = 6 - 3\alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases} \alpha \in IR$

3) C∈(𝒞) tel que ABC est un triangle équilatérale si CA = CB = AB donc C est un point de P et Q

Ainsi C est un point de Δ d'où $C(6 - 3\alpha\,,\,\alpha\,,\,\alpha)$ de plus $C \in S$ donc

$(6 - 3\alpha)^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 36 - 36\alpha + 9\alpha^2 + \alpha^2 + \alpha^2 - 8 = 0 \Leftrightarrow 11\alpha^2 - 36\alpha + 28 = 0$

$\Delta = 18^2 - 11\times 28 = 16$ donc $\alpha = \dfrac{18+4}{11} = 2$ ou $\alpha = \dfrac{18-4}{11} = \dfrac{14}{11}$ donc il suffit de vérifier que le triangle ABC est équilatéral pour $\alpha = 2$ ainsi C (0 ,2 , 2)

Exercice 4 : (6 points)

1) a) $z_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = -\dfrac{\sqrt{5}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$z_1 + z_2 = \dfrac{\sqrt{5}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{\sqrt{5}}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = -i\sqrt{3}$

$$z_1 \times z_2 = \left(\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(-\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\left(\frac{\sqrt{5}}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\times\left(\frac{\sqrt{5}}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\left(\left(\frac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2\right) = -\frac{8}{4} = -2$$

b) $(z - z_1)(z - z_2) = z^2 - zz_2 - zz_1 + z_1z_2 = z^2 - (z_2 + z_1)z + z_1z_2 = z^2 + i\sqrt{3}z - 2$

2) a) $OM_1 = |z_1| = \sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{2}$ et $OM_2 = |z_2| = \sqrt{\left(-\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^2 + \left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{5}{4} + \dfrac{3}{4}} = \sqrt{2}$

Ainsi M_1 et M_2 appartiennent au cercle (C).

b) $\dfrac{z_1 + z_2}{2} = -i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = z_H$ donc H est le milieu de $[M_1M_2]$.

3) a) K est le milieu du segment [MN] $\Leftrightarrow z_K = \dfrac{z^3 + z}{2} \Leftrightarrow -2i\sqrt{3} = z^3 + z \Leftrightarrow z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$

b) $\left(z - i\sqrt{3}\right)\left(z^2 + i\sqrt{3}z - 2\right) = z^3 + \cancel{i\sqrt{3}z^2} - 2z - \cancel{i\sqrt{3}z^2} + 3z + 2i\sqrt{3} = z^3 + z + 2i\sqrt{3}$

c) $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow \left(z - i\sqrt{3}\right)\left(z^2 + i\sqrt{3}z - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left(z - i\sqrt{3}\right)(z - z_1)(z - z_2) = 0 \Leftrightarrow z = i\sqrt{3}$ ou $z = z_1$ ou $z = z_2$

$$S_{\mathbb{C}} = \left\{i\sqrt{3}, z_1, z_2\right\}$$

d) z_1 est une solution de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0 \Leftrightarrow$ K est le milieu du segment $[M_1N_1]$
de même pour le point N_2

e) L'affixe de point A est $a = i\sqrt{3}$ en effet le nombre complexe $i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation $z^3 + z + 2i\sqrt{3} = 0$ donc le symétrique de A par rapport à K est d'affixe a^3