***Exercice1***

Soit le polynôme P(x) = $x^{3}$ – 2x – 21.

1)Montrer que si n est un entier tel que P(n) = 0, alors

n divise 21.

2) Déterminer l’ensemble des diviseurs de 21 et en

déduire une racine de P.

3) Résoudre l’équation P(x) = 0.

***Indications***

**1)P(**$n$ **)=0 equiv.** $n^{3}$ – 2$ n$ – 21=0 equiv. $n$ ($n$²-2)=21

 **Alors** $ n$ **/21**

**2)**$D\_{21}=$**{1,3,7,21}**

**P(1)=1-2-21**$\ne $**0**

**P(3)=27-6-21=0**

**P(7)=343-14-21**$\ne $**0**

**P(21)=9261-42-21**$\ne $**0**

3 est l’unique racine entière de P

2)vérifier la factorisation : P(x)=(x-3)(x²+3x+7)

***Exercice2***

1) Soit le polynôme f(x) = 8$x^{3}$ – 16x – 3.

a. Montrer que si n est un entier naturel tel que

 f(n) = 0, alors n divise 3.

b. En déduire que le polynôme f n’admet pas de racine entière.

2). On se propose de chercher si f admet une racine rationnelle positive.

Soit deux entiers naturels a et b premiers entre eux, vérifiant f($\frac{a}{b}$) =0

a. Montrer que 8$a^{3}$ – 16ab² – 3$ b^{3}$=0

b. En déduire que a divise 3 et que b divise 8.

c. Conclure.

***Indications***

1)b) si f(n) = 0, alors n divise 3.or $D\_{3}=$**{1,3}**

 f(1)=8-16-3$\ne $**0**

 f(3)=8$×$27 -16$×$3-3=216 -51$ \ne $**0**

f n’a pas de racine entière

2)a) si f($\frac{a}{b}$) =0 alors 8$(\frac{a}{b})^{3}$ – 16($\frac{a}{b}$) – 3=0 d’ou .

$ b^{3}$(8$(\frac{a}{b})^{3}$ – 16($\frac{a}{b}$) – 3)=0 donc 8$a^{3}$ – 16ab² – 3$ b^{3}$=0

b) 8$a^{3}$ – 16ab² – 3$ b^{3}$=0 donne a(8a²-16b²)=3$b^{3}$

 d’où a divise 3$b^{3}$ et puisque a$⋀$b=1 a/3

 8$a^{3}$ – 16ab² – 3$ b^{3}$=0 donne 8$a^{3}$=b(16ab+3b²)

d’où b divise 8$a^{3}$ et puisque a$⋀$b=1 b/8

c) a$\in D\_{3}=$**{1,3} b**$\in $$D\_{8}=$**{1,2,4,8}**

$\frac{a}{b}\in $**{**$\frac{1}{2}$**,** $\frac{1}{4}$**;** $\frac{1}{8}$ ;$\frac{3}{2}$ ;$\frac{3}{4}$**;** $\frac{3}{8} $**}**

f($\frac{1}{2}$) = 8$(\frac{1}{2})^{3}$ – 16($\frac{1}{2}$) – 3=1-8-3$ \ne $**0**

f($\frac{1}{4}$) = 8$(\frac{1}{4})^{3}$ – 16($\frac{1}{4}$) – 3=$\frac{1}{8}$ -4-3$\ne $**0**

f($\frac{1}{8}$) = 8$(\frac{1}{8})^{3}$ – 16($\frac{1}{8}$) – 3=$\frac{1}{64}$-2-3$\ne $**0**

f($\frac{3}{2}$) = 8$(\frac{3}{2})^{3}$ – 16($\frac{3}{2}$) – 3=27-24-3=0

 f(x) = 8$x^{3}$ – 16x – 3.=(x - $\frac{3}{2}$ )(8x²+12x+2)

***Exercice3***

**A=2n+3 B=5n-2**

a) calculer A$⋀$B pour n=1,n=2,n=3, n=8 ,n=27

**b)** calculer 5a -2b déduire les valeurs possibles de A$⋀$B

c)vérifier que si n =19k+8 alors A$⋀$B =19

***Indications***

b)5a -2b=5(2n+3)-2(5n-2)=15+4=19

Donc **Si d/a et d/b alors d/19 donc d=1 ou d=19**

c) si n =19k+8 alors A=2(19k+8)+3=19(2k+1)

B=5(19k+8)-2=19(5k+2)

***Exercice4***

**1) Soient A= n²+n et B=2n+1 (n** $\in N$**)**

a) calculer A$⋀$B pour n=1,n=2,n=3

b) **vérifier 4A +1=B² déduire** que A et B sont premiers entre eux

2) **Soient A= 15n²+8n+6 et B=30n²+21n+13**

a) calculer A$⋀$B pour n=1,n=2,n=3

b) **vérifier B=2A +(5n+1) et A=3n(5n+1)+5n+6**

 **et déduire A**$⋀$**B**

***Indications***

**1)b)on a 4A +1=B² donc Si d divise A et d divise B alors d divise 1 donc d=1**

2)  **A**$⋀$**B =A**$⋀$**(5n+1)= (5n+6)**$⋀$**(5n+1)= (5n+6)**$⋀$**(5)=1**

Ou si d/A et d/B alors( d/5n+1etd/5n+6)

donc d/(5n+6)-(5n+1) d’ou d/1

***Exercice5***

**1)Montrer que 6 divise** $5^{2n+1}+1$ **avec (n**$\in N$**)**

**2)Quel est le reste de** $5^{2015}$**par 6**

**3)a) Montrer que 6 divise** $5^{n}-(2^{n}+3^{n})$ **avec (n**$\in N^{\*}$**)**

**b)Quel est le reste de** $1+2^{2015}+3^{2015}$ **par 6**

***Indications***

1)Par récurrence sur n :pour n=0, $5^{0+1}+1$**=6 divisible par 6**

On suppose que **6 divise** $5^{2n+1}+1$**,donc**

$5^{2n+1}+1$**=6k (k**$\in N$**)**

**montrons 6 divise** $5^{2(n+1)+1}+1$**=** $5^{2n+3}+1$

$5^{2n+3}+1$**=25**$×$$5^{2n+1}+1$**=25**$×$**(6k-1)+1=6**$×$**25k-6**$×$**4**

**2)** $5^{2015}$**=**$5^{2×1007+1}$**=6k-1=6k’+5 avec k’= k+1donc le reste par 6 est 5**

3)a)$ 5^{n+1}-(2^{n+1}+3^{n+1})$

**= 5**$×5^{n}-(2×2^{n}+3×3^{n})$

**=5**$×$**(6k +**$2^{n}+3^{n}$**)**$ -(2×2^{n}+3×3^{n}$**)**

**=6**$×$**5k + 3**$×2^{n}$ **+2**$×3^{n}$**)**

**=6**$×$**5k + 3**$×2^{n}$ **+2**$×3^{n}$

=**6**$×$**5k + 3**$×2×2^{n-1}$ **+2**$×3×3^{n-1}$

**=6(5k +** $2^{n-1}$ **+**$3^{n-1}$**)**

**b)**$5^{2015}-(2^{2015}+3^{2015})$ **=6k**

**6p+5**$-(2^{2015}+3^{2015})$**=6k**

$1+2^{2015}+3^{2015}$**=6p-6k+6 multiple de 6**

**le reste de** $1+2^{2015}+3^{2015}$ **par 6 est 0**

***Exercice6***

**Résoudre dans**$N²$ **chacun des systèmes ci-dessous.**

 **1)** $ \left\{\begin{array}{c}x+y=56\\x⋁y=105\end{array}\right.$

***Indications***

**Soit d = x**$⋀$ **y donc d divise 56 =**$ 2^{3}$$×$**7 et**

**d divise 105=3** $×$**5** $×$**7**

**d’où d divise 56**$⋀$**105 =7 par suite d=1 ou d=7**

**si d=1 alors xy = 105 donc x²-56x+105=0……..**

**si d = 7alors xy = 735 donc x²-56x+735=0……..**

**(21 ;35) ;(35,21)**

**Réciproquement :21+35=56 21**$⋁$ **35=105**

$S\_{N² }$ **=**$ $**{ (21,35) ;(35,21)}**

**2)**$ \left\{\begin{array}{c}x+y=320\\x⋀y=16\end{array}\right.$

***Indications***

**Soit d = x**$⋀$ **y**

**x=dx’ et y=dy’ avec x’**$⋀$ **y’ = 1**

**16(x’+y’)=320 donne x’ + y’=20 avec x’**$⋀$ **y’ = 1**

**Si x’=1alors y’=19 et x=16 ,y=16**$×$**19=304**

 **Si x’=3 alors y’=17 et x=16**$×$**3=48 , y=16**$×$**17=272**

 **Si x’=7 alors y’=13 et x=16**$×$**7=112 , y=16**$×$**13=208**

**Si x’=9 alors y’=11 et x=16**$×$**9=144 , y=16**$×$**11=176**

$S\_{N² }$ **=**$ $**{ (16,304) ;(48,272) ; (112,208) ;(144,176) et leurs symétriques}**

**3)** $ \left\{\begin{array}{c}x²+y²=4625\\x⋁y =440 et x<y\end{array}\right.$

***Indications***

**Soit d = x**$⋀$ **y donc d divise 4625 et d divise 440**

**Vérifier que 4625**$⋀$ **440=5 d’ou d=1 ou d=5**

**Si d=1 alors le système devient**$\left\{\begin{array}{c}x²+y²=4625 (1)\\xy =440 et x<y\end{array}\right.$

**Donne (x+y)²-2xy=4625 donc(x+y)²=5505**

**xet y des entiers et 5505 n’est pas un carré parfait donc le système n’a pas de solution**

**Si d=5 alors le système devient**$\left\{\begin{array}{c}x²+y²=4625 (1)\\xy =2200 et x<y\end{array}\right.$

**(x+y)²-2xy=4625 donc(x+y)²=9025=95²**

**Ce qui donne x+ y=95**

**x=5x’ et y=5y’ avec x’**$⋀$ **y’ = 1 donc x’ + y’=19**

**et** $xy=25x'y'=2200 $ **donne x’y’=88**

**x’ et y’ sont solutions de x²-19x+88=0**

**x’=8 et y’=11 d’où x=40 et y=55**

$ S\_{N² }$ **=**$ $**{ (40,55)}**

**4)**$ \left\{\begin{array}{c}x²-y²=5440\\x⋀y=8\end{array}\right.$

***Indications***

**x=8x’ et y’=8y’ avec x’**$⋀$**y’=1**

$x²-y²=5440$ **devient x’²-y’²=85 donc**

 **(x’-y’)(x’+y’)=17**$×$**5**

**Avec les conditions sur x’ et y’on aura :x’=43ety’=42**

**Ou x’=11et y’=6**

$ S\_{N² }$ **=**$ $**{ (344,336) ;(88 ;48)}**

**5)**$ \left\{\begin{array}{c}x⋁y=540\\x⋀y=18\end{array}\right.$

***Indications***

**x=18x’et y=18y’ avec x’**$⋀$**y’=1**

**on a** $x⋁y=540$ **donc** $18x'⋁18y'=540$

**par suite 18x’y’=540 ce qui donne x’y’=30**

**(x’ ;y’)**$\in \{$**(1,30)( 2 ;15)(3 ;10)(5 ;6) et leurs symétriques}**

$ S\_{N² }$ **=**$ $**{ (18,540) ;(36 ;270) ; (54,180) ;(90 ;108) et leurs symétriques }**

**6)**$ \left\{\begin{array}{c}x⋁y=72\\x⋀y=x-y\end{array}\right.$

***Indications***

**Soit d=**$ x⋀y$ **et x=dx’ ; y=dy’ avec x’**$⋀$**y’ = 1**

**L’équation** $x⋀y=x-y$ **devient x’ – y’=1 et x’=1+y’**

**L’équation** $x⋁y=72$ **devient dx’**$⋁$**dy’=72donc dx’y’=72 d’où d(1+y’)y’=72**

 **y’ et y’+1deux diviseurs consécutifs de 72**

$D\_{72}=$**{1,2,3,4,6,8,9,12,18,24,36,72} y’**$\in \{$**1,2,3,8} d**$\in \{$**36,12 ;6 ;1}**

 **(x’ ;y’)**$\in \{$**(2,1) ;(3,2) ;(4,3) ;(9,8)}**

**Si d=1 alors x’=9 et y’=8**

**Si d=6 alors x’=4 et y’=3 donc x=24 et y=18**

**Si d=12 alors x’=3 et y’=2 donc x=36 et y=24**

**Si d=36 alors x’=2 et y’=1 donc x=72 et y=36**

**7)**$ \left\{\begin{array}{c}x⋁y=(x⋀y)²\\x⋀y+x⋁y=156\end{array}\right.$

***Indications***

**Soit d=**$ x⋀y$**; m=**$ x⋁y$ **donc**$ \left\{\begin{array}{c}m=d²\\m+d=156\end{array}\right.$

$x⋀y+x⋁y=156$ **devient :d+d²=156 ou d(d+1)=156**

**d²+d-156=0 a pour solutions 12et -13 d’ou d=12**

**ou : d et d+1 deux diviseurs consécutifs de 156**

$D\_{156}=$**{1,2,3,4,6,8,9,12,13,26,39,52,78,156} ce qui donne d=12 et m=144**

xy=dm donne **12x’**$×$**12y’=12**$×$**144 donne x’y’=12**

 **avec** $x'⋀y'$**=1 ;**

**x’ et y’deux diviseurs de 12 premiers entre eux**

 **or** $D\_{12}=$**{1,2,3,4,6,12} donc x’=1et y’=12ou x’=3et y’=4**

$ S\_{N² }$ **=**$ $**{ (12,144) ;(36 ;48)  et leurs symétriques }**