Exercice 1

1. Calculer chacune des intégrales suivantes : $\int_1^2 \frac{1}{x^2}.e^{\left(\frac{1}{x}\right)}dx$; $\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}dx$; $\int_0^{\pi/2} \sin x.e^{\cos x}dx$ et $\int_1^2 2^x dx$.

2. A l'aide d'une intégration par parties, calculer les intégrales $\int_0^1 x.e^{2x}dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{6}} x\cos\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)dx$.

3. A l'aide d'une double intégration par parties, calculer les intégrales :

$\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 e^{2x+1}dx$; $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^2\cos x.dx$; et $\int_e^{e^2} \left(\ln(x)\right)^2 dx$.

Exercice 2

On pose $I_1=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{1+2\sin x}dx$ et $I_2=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin 2x}{1+2\sin x}dx$.

1. Calculer I_1 .

2. Calculer I_1+I_2 et en déduire I_2 .

Exercice 3

On pose $I=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\cos^2 x.dx$ et $J=\int_0^{\frac{\pi}{4}} (2x+1)\sin^2 x.dx$.

1. Calculer $I+J$.

2. Calculer $I-J$ à l'aide d'une intégration par parties.

3. En déduire les valeurs de *I* et de *J*.

Exercice 4

L'objectif est de calculer les intégrales suivantes: $I=\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^2+2}}$; $J=\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}}dx$ et $K=\int_0^1 \sqrt{x^2+2}.dx$.

1. **Calcul de *I***: Soit *f* la fonction définie sur [0 ; 1] par $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+2}\right)$.

a) Montrer que $\forall x\in\mathbb{R}, f'(x)=\frac{1}{\sqrt{x^2+2}}$.

b) En déduire la valeur de l'intégrale *I*.

2. **Calcul de *J* et *K***.

a) Sans calculer explicitement *J* et *K*, vérifier que *J+ 2I= K*.

b) A l'aide d'une intégration par parties dans *K*, montrer que $K=\sqrt{3}-J$.

c) En déduire les valeurs de *J* et *K*.

Exercice 5

On pose $I_0=\int_1^e x.dx$ et $I_n=\int_1^e x.(\ln x)^n.dx$.

1. Calculer I_0 et I_1.

2. **a)** A l'aide d'une intégration par parties dans I_n, prouver que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$

$2I_n+nI_{n-1}=e^2$

b) En déduire I_2 .

3. **a)** Montrer sans calcul que la suite (I_n) est décroissante. En déduire, en utilisant la relation démontrée à la question 2, que pour tout n appartenant à $\mathbb{N}^*$, $\frac{e^2}{n+3} \leq I_n \leq \frac{e^2}{n+2}$

b) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nI_n$

Exercice 6

On définit la suite (I_n) par $I_0 = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$ et $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{\sqrt{1+x}}dx$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Calculer I_0 .
2. Utiliser une intégration par parties pour montrer que $(2n+3)I_{n+1} = 2\sqrt{2} - 2(n+1)I_n$.
3. En déduire I_1 et I_2

Exercice 7

On appelle f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x) = \frac{1-\ln x}{x}$ dont la courbe sera notée C.

1. **a)** Etudier les limites de f à droite en 0 et en $+\infty$. Quelles en sont les conséquences graphiques.
   b) Etudier les variations de f.
2. Calculer $\int_1^e f(x)dx$.
3. **a)** A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_1^e \frac{\ln x}{x^2}dx$ puis $\int_1^e \frac{(\ln x)^2}{x^2}dx$.
   b) Soit $C_0 = \{M(x, f(x)); 1 \leq x \leq e\}$ un arc de la courbe C. La rotation de C_0 autour de l'axe des abscisses engendre un solide de révolution (S). Calculer le volume de (S) en unité de volume.

Exercice 8

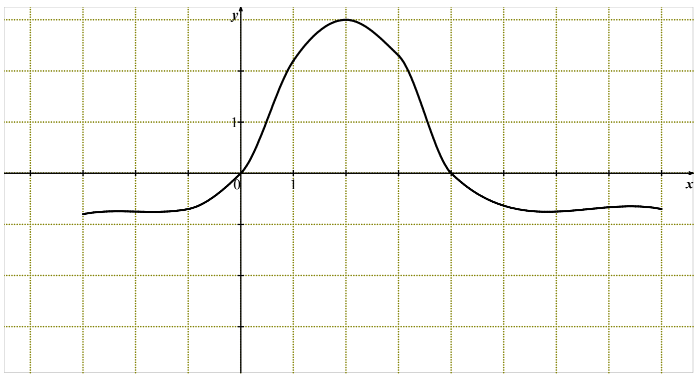
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-x}.\ln(1+e^x)$.

On désigne par C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 1$ .Interpréter graphiquement le résultat.
2. **a)** Vérifier que $f(x) = xe^{-x} + e^{-x}\ln(1+e^{-x})$.
   b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et en donner une interprétation graphique.
3. **a)** Vérifier que $\frac{1}{1+e^x} = 1 - \frac{e^x}{1+e^x}$.
   b) Soit α un réel strictement positif et $A(\alpha)$ l'aire du domaine plan limité par la courbe C, les axes du repère et la droite d'équation $x = \alpha$. Utiliser une intégration par parties pour calculer $A(\alpha)$.
   c) Déterminer $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} A(\alpha)$.

Exercice 9

On donne la représentation graphique d'une fonction f définie sur l'intervalle $I = [-3,8]$.



On définit la fonction F sur I par $F(x) = \int_0^x f(t)dt$.

1. **a)** Que vaut $F(0)$?
   b) Quel est le signe de $F(x)$ pour $x \in [0,4]$ et pour $x \in [-3,0]$?
2. Justifier graphiquement que $6 \leq F(4) \leq 12$.
3. Déterminer le sens de variation de F sur I.