**Etude de fonctions**
**Problèmes proposés par : M Abderrazek BERREZIG**

## Problème 1.

Soit la fonction f définie sur ]0 ; +∞[ par $f(x) = \frac{1}{x} - \ln x$, et la fonction g définie sur ]0 ; +∞[ par $g(x) = \frac{1}{3}\left(x + 2e^{\frac{1}{x}}\right)$.

### Partie A - Etude de f

**1.** Déterminer les limites de f en 0 et en +∞.
**2.** Etudier le sens de variation de f.
**3.** Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α. Prouver que $1{,}7 \leq \alpha \leq 1{,}8$.
**4.** Déduire des questions précédentes le signe de $f(x)$.
On ne demande pas de construire la courbe représentative de f.

### Partie B - Etude de g

On note *C* la courbe représentative de g.
**1.** Prouver que sur ]0 ; +∞[ l'équation $g(x) = x$ équivaut à l'équation $f(x) = 0$.
**2. a.** Déterminer la limite de g en 0.
**2. b.** Déterminer la limite de g en +∞ puis la limite en +∞ de $x \mapsto g(x) - \frac{1}{3}(x+2)$.Interpréter graphiquement ce résultat.
**3.** Etude des variations de g.
**3. a.** Calculer la dérivée g' de g.
**3. b.** Prouver que g' est croissante.
**3. c.** Déterminer la limite de g' en 0 et en +∞.
**3. d.** Prouver que l'équation $g'(x) = 0$ admet une solution β, et une seule, et que $1{,}8 \leq \beta \leq 1{,}9$ .
**3. e.** En déduire le sens des variations de g.
**4.** Dresser le tableau de variation de g et tracer la courbe *C* en précisant les points de *C* d'abscisse α et β.

## Problème 2.

### Partie A

Soit la fonction u définie sur **R** par $u(t) = e^t - t - 1$.
**1.** Etudier les variations de la fonction u.
**2.** En déduire le signe de u sur **R**.

### Partie B

Soit la fonction f définie par $f(t) = 1 + \frac{t+1}{e^t - t - 1}$. On note *C* la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité : 1 cm).
**1.** En utilisant le **A.**, vérifier que f est définie sur $\mathbf{R}^*$.
**2.** Calculer la limite de f en 0. Donner une interprétation graphique du résultat.
**3.** Montrer que $f(t) = \frac{e^t}{e^t - t - 1}$. Calculer alors la limite de f en −∞ et en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera la position par rapport à *C* sur ]−∞ ; 0[.
**4.** Montrer que $f(t) = \frac{1}{1 - \frac{t}{e^t} - \frac{1}{e^t}}$. Caculer alors la limite de f en +∞ et en déduire l'existence d'une asymptote dont on précisera la position par rapport à *C* sur ]0 ; +∞[.
**5.** Etudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
**6.** Déterminer une équation de la tangente *T* à *C* au point d'abscisse −1.
**7.** Tracer *T*, les asymptotes déterminées précédemment et la courbe *C* dans le repère$(O, \vec{i}, \vec{j})$.