Probabilité : Variables aléatoires discrètes

BAC 2014

Proposés Par : M. Berrezig

Exercice 1

1°) Un dé cubique D_1 comporte 3 faces marquées 1, 2 faces marquées 2, 1 face marquée 3. On lance le dé D_1, on note X_1 le nombre obtenu, Déterminer la loi de X_1 son espérance, sa variance.

2°) Mêmes questions pour X_2 le nombre obtenu en lançant un dé D_2 comportant 3 faces marquées 4, 2 faces marquées 5, 1 face marquée 6.

3°) On lance D_1 et D_2 simultanément, Calculer l'espérance de $Z = X_1 + X_2$. Vérifier en déterminant la loi de Z.

Exercice 2

Un service après-vente dispose d'équipes de dépannage qui interviennent auprès de la clientèle sur appel téléphonique. Les appels se produisent de façon indépendante, et la probabilité qu'un retard se produise dans le dépannage à la suite d'un appel est $p = 0,25$.

1°) Un même client a appelé le service à 8 dates différentes. Soit X le nombre de retards que ce client a subi.

a) Définir la loi de probabilité de X. Calculer E(X) et V(X).

b) Calculer (à 0,01 près au plus proche) les probabilités des événements :

- le client a subi au moins un retard ;
- le client a subi moins de 4 retards ;
- le client a subi moins de 4 retards sachant qu'il en a subi au moins un.

2°) On considère un ensemble de 8 clients différents. 2 d'entre eux sont mécontents parce qu'ils ont subi un retard. On contacte 4 clients parmi les 8. Soit M le nombre de clients mécontents parmi les 4 contactés. Définir la loi de M.. Calculer E(M).

Exercice 3

A et B sont deux avions avec respectivement 2 moteurs et 4 moteurs. Chaque moteur a la probabilité p de tomber en panne. Les pannes surviennent de façon indépendante. Chaque avion arrive à destination si et seulement si moins de la moitié de ses moteurs tombe en panne. Quel avion choisissez-vous ?

Exercice 4

On considère une urne de taille N (N>1) contenant r boules blanches et N– r boules noires (0< r < N). Dans cette urne on prélève toutes les boules une à une et SANS remise. On note X le rang d'apparition de la dernière boule blanche. Le but du problème est de déterminer : la loi de X et l'espérance et la variance de X.

1. **a)** Traiter le cas N = 4, r = 1.

b) Traiter le cas N =4, r = 2.

2. Dans le cas r = 1, reconnaître la loi de X et rappeler son espérance et sa variance.

3. Etude du cas général (1 < r < N) :

a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.

b) Soit k l'une de ces valeurs. Déterminer la probabilité pour qu'au cours des k-1 premiers tirages soient apparues r-1 boules blanches (et donc k - r boules noires). En déduire la valeur de P(X = k) c'est-à-dire la probabilité que la r-ième (et dernière) boule blanche apparaisse au k-ième tirage.

c) Vérifier, après simplifications, que $P(X = k) = \dfrac{C_{k-1}^{r-1}}{C_N^r}$. En déduire les valeurs des sommes $\sum_{k=r}^{N} C_{k-1}^{r-1}$, puis $\sum_{k=r}^{N} C_k^r$.

d) On rappelle que $n\,C_{n-1}^{p-1} = p\,C_n^p$. En déduire que $E(X) = \dfrac{r(n+1)}{r+1}$.

Exercice 5

On lance des fusées vers Saturne ; la probabilité de succès à chaque lancer est 0,7.

Berrezig

1°) Probabilité d'obtenir k succès en 10 lancers, $k \in [[0, 10]]$? Nombre moyen de succès par série de 10 lancers ?
2°) Combien faut-il prévoir de lancers pour être sûr a 90% d'obtenir au moins un succès ?

BERREZIG