***EXERCICE1***

*a* et *b* étant deux entiers naturels non nuls, on note *d* leur PGCD et *m* leur PPCM. Déterminez tous les couples *(a,b)* vérifiant le système : *m* = *d² et m* + *d* = 156 et *a* $\geq $ *b.*

***Solution***

En reportant la première égalité dans la deuxième, on obtient :

*m* + *d* = *d*² + *d* = *d (d* + 1*)* = 156 .

*d* et *d* + 1 sont donc des diviseurs de 156.

Dans$N$, les diviseurs de 156 = 2² × 3 × 13 sont :

$D\_{156}=${1*,*2*,*3*,*4*,*6*,*12*,*13*,*26*,*39*,*52*,*78*,*156} .

On a donc *d* = 12 et *m* = 144.

On sait que *md* = |*ab*|. Introduisons les nombres *a’* et *b’* , premiers entre eux

tels que *a* = 12*a’* et *b* = 12*b’* .

En reportant dans la dernière égalité, on obtient :

*a’*$×$*b’* = 12.

Deux possibilités sont à envisager car *a’* $\geq $*b’* :

– *a’* = 12 et *b’* = 1, qui conduit à la solution *a* = 144 et *b* = 12 ;

– *a’* = 4 et *b’* = 3, qui conduit à la solution *a* = 48 et *b* = 36.

***EXERCICE2***

Soit *n* un entier relatif, démontrer que 7*n* +18 et 10*n²*+51*n* +65 sont premiers entre eux

***Solution***  En factorisant, on obtient : 10*n²*+51*n* +65 = (5*n* +13)(2*n* +5).

On a : 2(7*n* +18)−7(2*n* +5) = 1 et −5(7*n* +18)+7(5*n* +13) = 1; donc, d’après le théorème de BÉZOUT, 7*n*+18 est premier avec 2*n*+5 et 5*n*+13; par conséquent 7*n*+18 est premier ave leur produit c’est-à-dire. 10*n²*+51*n* +65

***EXERCICE3***

Trouver le plus petit entier *x* tel que : 2divise*(x –* 1)*,*

3 divise*(x – 2*)*,…..…*,9 divise*(x-8)*

**Solution**

La condition est équivalente a *x* + 1 a la fois multiple de 2, de 3, et ainsi de suite jusqu’a 9. Elle est donc également équivalente a *x* + 1 multiple de PPCM (2*,* 3*,* 4*,* 5*,* 6*,* 7*,* 8*,* 9) = 2520. La plus petite solution positive est *x* = 2519**.**

***EXERCICE4***

Soit n > 2.On pose a = $n^{5}$ − n. Montrer que$( n^{3}$− n divise a)puis que (30divise a).

***Solution***

 D´après le petit théorème de Fermat, 5 divise a

et, avec a = n($ n^{4}$−1) = n($n^{2}-$1)($ n^{2}+1)$ = ($ n^{3}$− n)($ n^{2}+1)$

3 divise a. Puisque 3 et 5 sont premiers entre eux, 15 divise a.

Enfin, a = n(n − 1) (n + 1)( $n^{2}$+ 1) où n et n − 1 sont des

entiers consécutifs, donc 2 divise a. On conclut que 30 divise a puisque 2 et 15 sont premiers entre eux.

***EXERCICE5***

Trouver tous les couples (a ,b) d’entiers non nuls tels que

a $⋀$ b$=$ 19 et ab = 2166

***Solution*** a=19a’ et b=19b’ avec a’$⋀$ b’=1

ab = 2166 eq 19a’$×$19b’=2166 eq 361 a’ b’=2166 d’où a’ b’=6

les solutions sont (19,114) ;(38,57) ;(114,19) ;(57,38)

***EXERCICE6***

Montrer que tout nombre premier est nécessairement de la forme 6*k* + 1 ou 6*k* – 1, avec *k*  $\geq $1.

***Solution***

 Comme le reste dans une division par 6 peut être 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, tout entier

naturel est nécessairement de la forme 6*k*, 6*k* + 1, 6*k* + 2, 6*k* + 3, 6*k* + 4 ou 6*k* + 5.

S’il est de la forme 6*k*, il n’est jamais premier car il est divisible par 6.

S’il est de la forme 6*k* + 2, il n’est jamais premier (sauf si *k* = 0) car il est divisible par 2

et n’est pas égal à 2.

S’il est de la forme 6*k* + 3, il n’est jamais premier (sauf si *k* = 0) car il est divisible par 3

et n’est pas égal à 3.

S’il est de la forme 6*k* + 4, il n’est jamais premier car il est divisible par 2 (et différent de 2

*Conclusion* : un nombre premier strictement supérieur à 3 est nécessairement de la forme

6*k* + 1 (*k* $\geq $ 1) ou 6*k* + 5 (*k* $\geq $ 0).

Comme 6*k* + 5 = 6(*k* + 1) – 1 = 6*K* – 1, on peut finalement dire que tout nombre premier est nécessairement de la forme 6*k* + 1 ou 6*k* – 1, avec *k*  $\geq $1.

Réciproque fausse !

***EXERCICE7***

Montrer que :

1) 11/ $2^{123}$+ $3^{121}$

2) 7/$2^{n+2}$+ $3^{2n+1}$

***Solution***

1. On a $2^{5}$≡ −1 (mod11), d’où $2^{10}$≡ 1 (mod11). Aussi, on a

$3^{5}$≡1 (mod11), alors

 $2^{123}$ +$3^{121}$ = $2^{10^{12}}2^{3}$ + $3^{10^{12}}$3 ≡ $2^{3}$ + 3 ≡ 0 (mod11).

1. $2^{n+2}$+ $3^{2n+1}$ = $2^{n}4$+$3^{2^{n}}$ ≡$2^{n}$ (3 + 4) ≡ 0 (mod7).

***EXERCICE8***

La décomposition de 561 en facteurs premiers est 561 = 3$×$11$×$17

Soit a un entier premier avec 561.

1. Vérifier que a est premier avec chacun des entiers 3, 11 et 17.

2. Montrer que

 a. 3 divise $ a^{2}-1 $

 b. 11 divise $ a^{10}$ $-1 $

 c. 17 divise$ a^{16}$ $-1 $

3. En déduire les congruences

$a^{560}$ $≡$ 1(mod3), $a^{560}$ $≡$1(mod11) et $a^{560}$ $≡$ 1(mod17).

4. Montrer que 561 divise$ a^{560}$ – 1

*indications:*

2) 3 premier et ne divise pas a donc (Fermat) $a^{3-1}≡1(mod3) $ d’où $ a^{2}≡1(mod3) $

3)$ a^{560} $ $≡$ $ (a^{2})^{ 280}(mod3) ≡$1(mod3)

4)$ a^{560} $ $ $ $≡$ 1mod( 3$×$11$×$17) d’où $ a^{560} $ $-1$ $≡$0(mod561)

***EXERCICE9***

1. Montrer que$ 2^{5}≡$ 1(mod31) et $2^{5}$ $≡$-1(mod 11)

2. En déduire les congruences $ 2^{340} ≡$1(mod 31) et $2^{340} ≡$1(mod 11)

3. Montrer que 341 divise $2^{340}$ – 1

*indications :*

$2^{5}$.$≡$ 32(mod31)$≡$ 32-31 (mod31)$ ≡$1(mod31) et

 $2^{5}$.$≡$ 32(mod11)$≡$32-33 (mod11)$ ≡$-1(mod11)

 $2^{340} =(2^{5})^{ 170}≡1^{170}$(mod31)$ ≡$1(mod31) et

$2^{340} =(2^{5})^{ 170}≡(-1)^{170}$*(*mod*11)*$ ≡$*1(*mod*11)*

 $2^{340}$ - 1 $≡$0(mod31) et $2^{340}$ - 1 $≡$0(mod11)

 Puisque :31$⋀$11 = 1 donc $2^{340}$ - 1 $≡$0(mod11$×$ 31)

$2^{340}$ - 1 $≡$0(mod341) d’où 341 divise $2^{340}$ – 1

***EXERCICE10***

Déterminer les entiers x et y tels que 4x = 3y.

***Solution***

L’entier 4 divise 3y et 4 est premier avec 3. D’après le théorème de Gauss,

4 divise y. Ainsi, il existe un entier k tel que y = 4k.

On a donc 4x =3(4k) d’où x = 3k.

Réciproquement, si x = 3k et y = 4k,

4x =4(3k)=12k et 3y =3(4k)=12k donc on a bien 4x = 3y.

Les solutions de cette équation sont les couples (3k ; 4k) avec k$\in Z$

***EXERCICE11***

Résoudre dans$Z$ : 15*x* ≡ 25(mod35).

***Solution***

**15*x* ≡ 25(mod35) equi 15*x* = 25+35*k* (*k* ∈**$Z$**)**

**equi 3*x* = 5+7*k* (*k* ∈**$Z$**)**

**3*x* ≡ 5(mod7)**

**3*x* ≡ 3×4(mod7) car 5 ≡ 3×4(mod7)**

**3(*x* −4)≡ 0(mod7)**

***x* −4 ≡ 0(mod7) car 3 et 7 sont premiers entre eux**

***x* ≡ 4(mod7) .**

**Remarque :**

|  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x(mod7)** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
| **3x(mod7)** | **0** | **3** | **6** | **2** | **5** | **1** | **4** |

***EXERCICE12***

Résoudre dans$Z$ l’équation : *x*² ≡ 7(mod9).

**Solution : On a : 7 ≡ 16(mod9) donc :**

***X*² ≡ 7(mod9) equi *x*² −16≡ 0(mod9) equi (*x* −4)(*x* +4) ≡ 0(mod9) .**

**Un entier *x* est solution de l’équation si et seulement si (*x*−4)(*x*+4) est multiple de 9,mais 9 = 3² ;**

**on a donc trois possibilités. Soit *x* −4 est multiple de 9, soit (*x* +4) est multiple de 9, soit (*x* −4) et(*x* +4) sont multiples de 3**

**si (*x* −4) et(*x* +4) sont multiples de 3 alors (*x* +4)- (*x -*4)=8 sera un multiple de 3 impossible**

**si *x* −4 est multiple de 9,alors x=9k+4**

**si *x* +4 est multiple de 9, alors x=9k’+5**

S =$\left\{9k +4; k \in Z\right\}∪\left\{9k+5; k \in Z\right\}$

**Remarque :**

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| **x(mod9)** | **0** | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** | **7** | **8** |  |
| **X²(mod9)** | **0** | **1** | **4** | **0** | **7** | **7** | **0** | **4** | **1** |  |

***EXERCICE13***

 Résoudre dans $Z$ le système :

$$\left\{\begin{array}{c}x ≡ 7(mod8)\\x ≡ 11(mod12)\end{array}\right.$$

***Solution* On remarque que −1 est une solution du système.**

$$\left\{\begin{array}{c}x ≡ 7(mod8)\\x ≡ 11(mod12)\end{array} \right.\left\{\begin{array}{c}x ≡ -1(mod8)\\x ≡ -1(mod12)\end{array}\right.\left\{\begin{array}{c}x+1≡ 0(mod8)\\x+1≡ 0(mod12)\end{array}\right.$$

**Les solutions du système sont les entiers *x* tels que *x*+1 est à la fois multiple de 8 et 12, c’est-à-dire**

**de leur PPCM: 24. D’où :** S =$\left\{24k-1 ; k \in Z\right\}$

***EXERCICE14***

Résoudre dans Z le système : $\left\{\begin{array}{c}15x ≡ 9(mod12)\\4x ≡ 5(mod7)\end{array}\right.$

***Solution*** 15x ≡ 9(mod12) equi15x = 9+12k (k ∈Z) equi 5x = 3+4k (k ∈Z)

Equi 5x ≡ 3(mod4) equi x ≡ 3(mod4)

4x ≡ 5(mod7) equi 8x ≡ 10(mod7) equi x ≡ 3(mod7)

Donc : le système $\left\{\begin{array}{c}15x ≡ 9(mod12)\\4x ≡ 5(mod7)\end{array}\right.$ devient $\left\{\begin{array}{c}x-3≡ 0(mod4)\\x-3≡ 0(mod7)\end{array}\right.$

Les solutions du système sont les entiers x tels que x −3 est à la fois multiple de 4 et de 7 donc deleur PPCM: 28. S =$\left\{28k+3 ; k \in Z\right\}$

***EXERCICE15***

Résoudre dans$Z$: 5x ≡ 7(mod11).

***Solution*** On a : 5×8 = 40= 7+11×3; donc : 5×8 ≡ 7(mod11).

8 est donc une solution particulière de l’équation, on en déduit que :

5x ≡ 7(mod11) equi 5x ≡ 5×8(mod11) equi 5(x −8)≡ 0(mod11)

equi x −8≡ 0(mod11) car 5 et 11 sont premiers entre eux

equi x ≡ 8(mod11) . S =$\left\{11k+8 ; k \in Z\right\}$

***EXERCICE16***

Résoudre dans $Z$

a. 17x$≡$ 1 (mod33).

b. 17x $≡$ -9 (mod33) .

***indication s:***

**17**$⋀$**33 =1 la solution est unique modulo33**

**a)X est l’inverse de 17 modulo33 ,on remarque :**

 **17**$×$**2=34**$ $$≡$ **1(mod33)**

**X=2+33k ;k**$\in Z$

**b) 17**$×$**2**$≡$ **1(mod33) d’ou17**$×$**2**$×$**(-9)** $≡$ **(-9)(mod33)**

**d’ou17**$×(-18)$$≡$ **(-9)(mod33)**

**x**$≡$**(-18)**$ ≡$**24(mod33)**

**x=24+33k avec k**$\in Z$

**Remarque : 17**$⋀$**33 =1 (BEZOUT) 33=17**$×$**1 +16 17=16**$×$**1+1**

**1=17 -16=17-(33-17)=17**$×$**2 -33**$×$**1**

**17**$×$**2 -33**$×$**1(mod33)**$ ≡$ **1(mod33) donne**$17×2 ≡$ **1(mod33)**

***EXERCICE17***

Résoudre dans Z² l’équation : 25*x* +15*y* = 35. (E)

Solution On a : (E) équivaut a 5*x* +3*y* = 7.

On a : 5×2+3×(−1) = 10−3= 7; donc (2;−1) est une solution particulière de (E)

d’où : (E) équivaut a 5*x* +3*y* = 5×2+3×(−1) équivaut a 3(*y* +1) = −5(*x* −2).

Raisonnons maintenant par conditions nécessaires. Soit (*x* ; *y*) une solution.

3 divise −5(*x* −2) et est premier avec −5 donc, d’après le théorème de GAUSS, 3 divise *x* −2.

Soit *k* le quotient, on a donc : *x* −2= 3*k* et *x* = 3*k* +2.

En substituant *x* −2 par 3*k* dans le dernier membre de la dernière équivalence, il vient : 3(*y* +1) =−5×3*k* ; d’où : *y* = −5*k* −1.

On en déduit que toutes les solutions de (E) sont de la forme :

 (3*k* +2;−5*k* −1) (avec *k* ∈Z).

Réciproquement, les couples de cette forme sont-ils tous solutions de (E)?

Soit *k* ∈Z, considérons le couple (3*k* +2;−5*k* −1).

On a : 5(3*k* +2)+3(−5*k* −1)= 15*k* +10−15*k* −3= 7; donc :

S =$\left\{(3k +2;-5k -1) k \in Z\right\}$

***EXERCICE18***

 On se propose de déterminer une solution particulière de l’équation

 567*x* +2854*y* = 5.

1. Démontrer, en utilisant l’algorithme d’Euclide, que 567 et 2854 sont premiers entre eux.

2. Utiliser les calculs effectués à la question précédente pour déterminer deux entiers relatifs *u* et *v* tels que :

567*u*+2 854*v* = 1.

3. Déterminer deux réels *u*′ et *v*′ tels que : 567*u*′ +2 854*v*′ = 5.

***Solution :*** On a : 2 854= 5×567+19; donc : PGCD(2 854;567)= PGCD(567;19).

On a : 567= 29×19+16; donc : PGCD(567;19)= PGCD(19;16).

On a : 19= 16+3; donc : PGCD(19;16)= PGCD(16;3).

On a : 16= 5×3+1; donc : PGCD(16;3)= PGCD(3;1)= 1.

Les nombres 567 et 2 854 sont donc premiers entre eux.

2. Utilisons les divisions euclidiennes précédentes, de la dernière à la première.

On a : 1 = 16−5×3

= 16−5(19−16)

= −5×19+6×16

= −5×19+6(567−29×19)

= 6×567−179×29

= 6×567−179(2 854−5×567)

= 901×567−179×2 854

On peut donc prendre : *u* = 901 et *v* = −179.

3. En multipliant membre à membre le dernière égalité par 5, nous obtenons :

4 505×567−895×2 854= 5.

On peut donc prendre : *u*′ = 4 505 et *v*′ = −895.

***EXERCICE19***

Résoudre dans $Z$ l’équation (E): 405x - 120y = 15

1ere étape : on cherche une solution particulière en utilisant l’algorithme d’Euclide

405 = 120 × 3 + 45 (1)

120 = 45 × 2 + 30 (2)

45 = 30 × 1 + 15 (3)

30 = 15 ×2 + 0 (4)

Le dernier reste non nul est le pgcd des 2 nombres, donc pgcd (405 ; 120) = 15.

On pourra exprimer 15 en fonction de 405 et 120 en remontant de la division (3) à la division (1).

15 = 45 - 1 ×30 d’après (3).

15 = 45 - 1× (120 - 2 × 45) d’après (2).

15 = 405 - 3 ×120 - 1 ×(120 - 2 × (405 - 3 × 120)) d’après (1).

Soit 15 = 3 × 405 - 10 ×120

(3,10) une solution particulière

2eme étape : la solution générale en utilisant la solution particulière et le théorème de Gauss

405x - 120y =405× 3 -10× 120

27(x-3)=8(y-10)

27 et 8 sont premiers entre eux, donc d’après le théorème de Gauss, 27 divise

y -10, donc il existe $k\in Z$ que :y=27k +10 et x=8k+3

Réciproquement, si x=8k+3 et y=27k +10 alors 405(8k+3)-120(27k +10)=15

S =$\left\{(8k +3;27k+10) k \in Z\right\}$