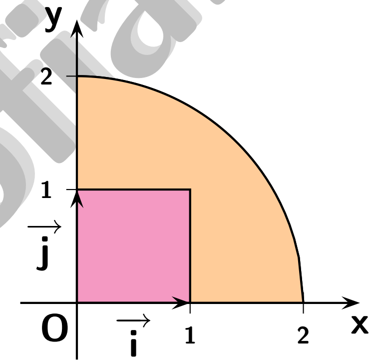
MATHÉMATIQUES : INTÉGRALES — JANVIER 2014

Pr : BEN FREDJ SOFIANE

1. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}})$ unité graphique est le cm. Dans la figure ci-contre, le domaine $\mathscr{D}$ désigne le quart d'un disque de rayon $\mathbf{2}$.

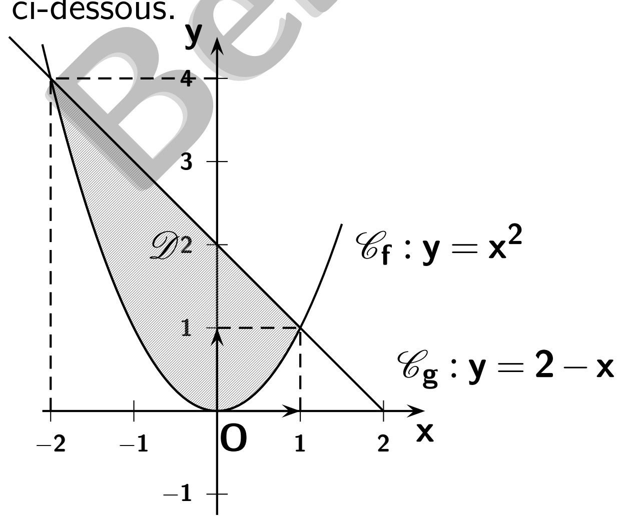


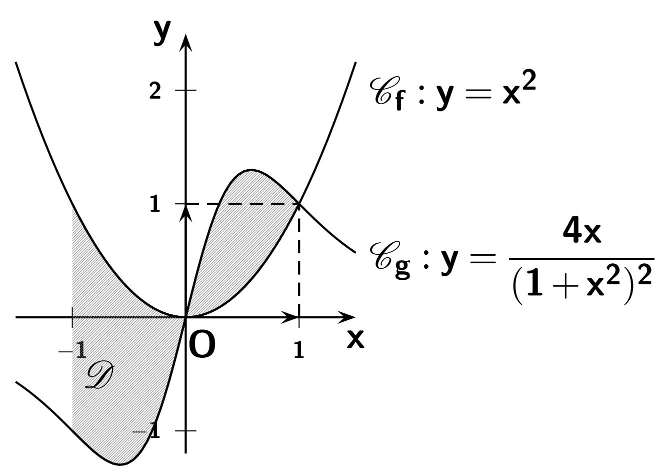
1− Écrire l'aire de $\mathscr{D}$ au moyen d'une intégrale.

2− Déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^2 \sqrt{4-t^2}\,dt$

3− Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{2t-t^2}\,dt$.

2. L'unité graphique est le centimètre. Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}})$. Calculer en unité d'aire l'aire du domaine $\mathscr{D}$ dans chacun des cas ci-dessous.





$\boxed{\mathbf{3}}$. Calculer les intégrales suivantes :

1− $\displaystyle\int_{-1}^{1} u\sqrt{1+u}\,du$.

2− $\displaystyle\int_{0}^{4} \frac{dt}{\sqrt{2t+1}}$

3− $\displaystyle\int_{0}^{1} t(1-t)^4\,dt$

4− $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 t\,dt$.

5− $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan^4 t\,dt$.

6− $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^2}{\cos^2 t}\,dt$.

7− $\displaystyle\int_{a}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,dt$ où $a>0$.

$\boxed{\mathbf{4}}$. Soit f la fonction définie par : $f : x \mapsto x^3+x$.

1− Montrer que f possède une fonction réciproque f^{-1} définie et continue sur $\mathbb{R}$.

2− Calculer $\displaystyle\int_{0}^{2} f^{-1}(t)\,dt$.

$\boxed{\mathbf{5}}$. A l'aide d'une (ou plusieurs) intégration par parties calculer :

1− $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} t\sin 2t\,dt$

2− $\displaystyle\int_{0}^{1} \frac{x^3}{(x^2+1)^3}\,dt$.

3− $\displaystyle\int_{0}^{\pi} t^2\sin t\,dt$.

4− $\displaystyle\int_{\pi^2}^{4\pi^2} \cos\sqrt{t}\,dt$

$\boxed{\mathbf{6}}$. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $[0,\pi]$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{0}^{2\cos x} \sqrt{4-t^2}\,dt$.

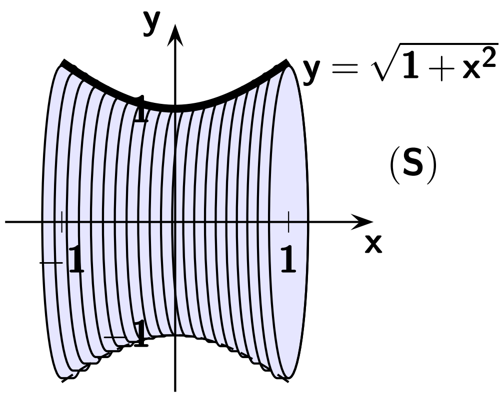
1. Montrer que F est dérivable sur $[0,\pi]$ puis calculer $F'(x)$.
2. Calculer la dérivée de la fonction $G(x)=\sin 2x-2x$ puis déduire l'expression de $F(x)$.
3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{1}^{\sqrt{3}} \sqrt{4-t^2}\,dt$

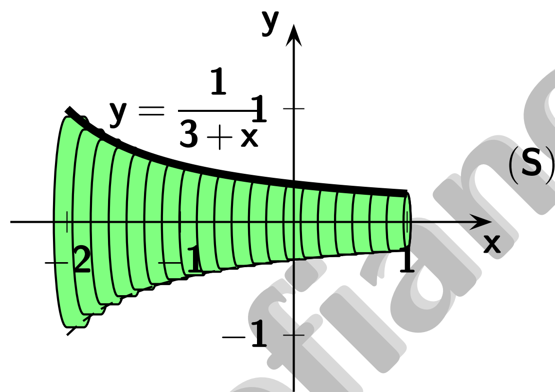
$\boxed{\mathbf{7}}$. Soit F la fonction définie sur l'intervalle $]0,\pi[$ par : $F(x)=\displaystyle\int_{0}^{2\cos x} \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}\,dt$.

1. Montrer que F est dérivable sur $]0,\pi[$ puis calculer $F'(x)$.
2. Calculer $F(\frac{\pi}{2})$ puis déduire l'expression de $F(x)$.

3. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{4-t^2}}dt$

$\boxed{8}$. L'espace est rapporte à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Calculer le volume de chacun des solides représentés ci-dessous.





$\boxed{9}$. Pour tout entier $n \geq 0$, on pose $U_n = \displaystyle\int_0^1 t^{2n}\left(1-t^2\right)^n dt$.

1− Montrer que la suite (U_n) est décroissante et minorée par 0.

2− Montrer que pour tout $n \geq 0$, $0 \leq U_n \leq \dfrac{1}{4^n}$

3− Déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

$\boxed{10}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $U_n = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+t^n}dt$.

1− Montrer que pour tout réel $t \in [0,1]$, on a : $1 \leq \sqrt{1+t^n} \leq 1+\dfrac{t^n}{2}$.

2− Montrer que pour tout $n \geq 0$, on a : $1 \leq U_n \leq 1+\dfrac{1}{2(n+1)}$.

3− Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

4− Pour tout $n \geq 0$, on pose $V_n = \displaystyle\int_0^1 t^n\sqrt{1+t^n}dt$.

(a) A l'aide d'une intégration par parties montrer que : $V_n = \dfrac{4\sqrt{2}}{2+3n} - \dfrac{2U_n}{2+3n}$.

(b) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} nV_n$.

$\boxed{11}$. .

1− Soit $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \displaystyle\int_0^{\tan x} \frac{\mathbf{t}^2}{1+\mathbf{t}^2}\mathbf{dt}$ où $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$ avec $\mathbf{I} = \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

(a) Montrer que $\mathbf{F}$ est dérivable sur $\mathbf{I}$ et que pour tout $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$, $\mathbf{F}'(\mathbf{x}) = \tan^2 \mathbf{x}$

(b) Déduire que pour tout réel $\mathbf{x} \in \mathbf{I}$, $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \tan \mathbf{x} - \mathbf{x}$.

(c) Calculer alors l'intégrale $\mathbf{A} = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathbf{t}^2}{1+\mathbf{t}^2}\mathbf{dt}$.

2− Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[\mathbf{0}, \mathbf{2}[$ par : $\varphi(\mathbf{x}) = \sqrt{\dfrac{\mathbf{x}}{\mathbf{2}-\mathbf{x}}}$.

On note $(\mathbf{C})$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(\mathbf{O}; \overrightarrow{\mathbf{i}}, \overrightarrow{\mathbf{j}})$.

On donne ci-dessous le tableau de variation de φ.

$\mathbf{x}$	$\mathbf{0}$		$\mathbf{2}$
$\varphi'(\mathbf{x})$	$\Vert$	$+$	$\Vert$
$\varphi(\mathbf{x})$	$\mathbf{0}$	$\nearrow$	$+\infty$ $\Vert$

(a) Étudier la position de $(\mathbf{C})$ par rapport à la droite $\mathbf{D}$ d'équation $\mathbf{y} = \mathbf{x}$ puis tracer $(\mathbf{C})$ et $\mathbf{D}$.

(b) Montrer que φ possède une fonction réciproque φ^{-1} définie et continue sur un intervalle $\mathbf{J}$ que l'on précisera. Tracer $(\mathbf{C}')$ la courbe de φ^{-1}.

(c) Montrer que pour tout réel $\mathbf{y} \in \mathbf{J}$, $\varphi^{-1}(\mathbf{y}) = \dfrac{\mathbf{2y}^2}{\mathbf{1}+\mathbf{y}^2}$.

(d) Calculer en unité d'aire, l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes $(\mathbf{C})$ et $(\mathbf{C}')$.