Pr : BEN FREDJ SOFIANE

$\boxed{1}$. Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormé direct $(\mathbf{O}; \overrightarrow{\mathbf{u}}, \overrightarrow{\mathbf{v}})$. On définit l'application $\mathbf{f}$ de $\mathscr{P}$ dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe $\mathbf{z}$ associe le point $\mathbf{M}'$ d'affixe $\mathbf{z}'$ définie par : $\mathbf{z}' = -\mathbf{jz} + \mathbf{i}$ où $\mathbf{j} = \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{2\pi}{3}}$.

1− Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $\mathbf{f}$.

2− On définit dans $\mathscr{P}$ les points $\mathbf{M_n}$ par :

- $\mathbf{M_0}$ coïncide avec O.
- pour tout $\mathbf{n} \in \mathbb{N}$, $\mathbf{M_{n+1}} = \mathbf{f}(\mathbf{M_n})$.

(a) Construire $\mathbf{\Omega}$, $\mathbf{M_0}$, $\mathbf{M_1}$ et $\mathbf{M_2}$. (unité graphique est 4 cm).

(b) Pour tout entier $\mathbf{n}$, on pose $\mathfrak{z}_\mathbf{n}$ l'affixe de $\mathbf{M_n}$ et on pose : $\mathbf{Z_n} = \mathfrak{z}_\mathbf{n} - \mathbf{e}^{\mathbf{i}\frac{\pi}{6}}$.
Déterminer le nombre complexe $\mathbf{a}$ tel que pour tout entier $\mathbf{n}$,

$$\mathbf{Z_{n+1}} = \mathbf{aZ_n}.$$

Mettre $\mathbf{a}$ sous forme trigonométrique et déterminer le plus petit entier $\mathbf{p} > \mathbf{0}$ tel que $\mathbf{a^p} = \mathbf{1}$.

(c) Calculer $\mathbf{Z_n}$ puis $\mathfrak{z}_\mathbf{n}$ en fonction de $\mathbf{n}$.Calculer $\mathfrak{z}_{\mathbf{2012}}$ et placer $\mathbf{M_{2013}}$ sur le dessin.

$\boxed{2}$. **AFED** est un carré direct de centre **O**.

On pose $\mathbf{O_1} = S_{\mathbf{EF}}(\mathbf{O})$ et $\mathbf{B} = S_{\mathbf{EF}}(\mathbf{A})$.

1− a− Soit $\mathbf{r}$ la rotation telle que $\mathbf{r}(\mathbf{F}) = \mathbf{E}$ et $\mathbf{r}(\mathbf{E}) = \mathbf{D}$. Préciser l'angle et le centre de $\mathbf{r}$.

b− Soit $\mathbf{f} = \mathbf{r} \circ S_{\mathbf{OO_1}}$. Montrer que $\mathbf{f} = S_{\mathbf{OE}}$.

2− Soit $\mathbf{r}' = \mathbf{t}_{\overrightarrow{\mathbf{OO_1}}} \circ \mathbf{r}^{-1}$.

a− Montrer que $\mathbf{r}'$ est une rotation que l'on précisera l'angle.

b− Déterminer $\mathbf{r}'(\mathbf{O})$. En déduire que $\mathbf{F}$ est le centre de $\mathbf{r}'$.

3− Soit $\mathbf{g}$ l'antidéplacement tel que $\mathbf{g}(\mathbf{D}) = \mathbf{F}$ et $\mathbf{g}(\mathbf{O}) = \mathbf{O_1}$.

a− Montrer que $\mathbf{g}$ est une symétrie glissante et déterminer sa forme réduite.

b− Soit $\mathbf{M}$ un point du plan.
Montrer que $\mathbf{g}(\mathbf{M}) = \mathbf{r}'(\mathbf{M}) \Longleftrightarrow \mathbf{f}(\mathbf{M}) = \mathbf{M}$.

c− Déduire l'ensemble des points $\mathbf{M}$ du plan tels que $\mathbf{g}(\mathbf{M}) = \mathbf{r}'(\mathbf{M})$.

3. **ABC** est un triangle rectangle en **A** tel que $(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$, **O** est le milieu de [**BC**] et **R** est la rotation de centre **C** et d'angle $-\frac{\pi}{3}$

1– a– Montrer qu'il existe un unique déplacement **f** tel que $f(A) = O$ et $f(C) = B$.

b– Montrer que **f** est une rotation dont on précisera son angle. Construire son centre **I**.

c– Donner une mesure de l'angle orienté $(\overrightarrow{IO},\overrightarrow{IB})$ et en déduire que **I** appartient au segment [**AB**].

2– Soit $\varphi = S_{IC} \circ S_{BC} \circ S_{OI} \circ S_{IC}$.

a– Montrer que $\varphi = R \circ f$.

b– Déterminer $\varphi(A)$ puis caractériser φ.

c– Déduire que $R^{-1} \circ S_{AB} = f \circ S_{AC}$

3– Soit **g** l'antidéplacement tel que $g(A) = O$ et $g(C) = B$.

a– Montrer que **g** est une symétrie glissante dont on précisera l'axe et le vecteur.

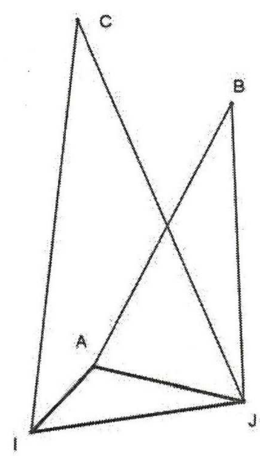
b– Soit **D** le point tel que **ABDC** est un rectangle. Montrer que $g(O) = D$.

c– On pose $B' = g(B)$. Montrer que $B' = S_D(B)$.

4. .

Dans le plan orienté, AIJ est un triangle quelconque, BAJ et CIJ sont deux triangles isocèles respectivement en B et C tels que $(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ et $(\widehat{\overrightarrow{CI},\overrightarrow{CJ}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

On désigne par t la translation de vecteur $\overrightarrow{IA}$ et par r_B et r_C les rotations de même angle $\frac{\pi}{6}$ et de centres respectifs B et C.



1) a) Déterminer $r_C(I)$.
b) Montrer que $r_B \circ t(I) = J$.
c) En déduire que $r_B \circ t = r_C$.

2) Soit $K = t(C)$.

Montrer que $BC = BK$ et $(\widehat{\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BK}}) \equiv -\frac{\pi}{6}[2\pi]$.

3) Soit D le point du plan tel que le triangle DIA est isocèle en D et $(\widehat{\overrightarrow{DI},\overrightarrow{DA}}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$.

a) Soit O le milieu de [AC].
Montrer que l'image du triangle DIA par la symétrie centrale de centre O est le triangle BKC.
b) Montrer que ABCD est un parallélogramme.