Fonction dérivée $3^{ème}$ Mathématiques

Exercice 1

Déterminer dans chaque cas la fonction dérivée de la fonction f indiquée tout en précisant le domaine de dérivabilité de f.

$f(x) = -3x^4 + 2x^3 - 5$; $f(x) = \dfrac{3x-1}{2x+1}$; $f(x) = \dfrac{-x^2+3x-1}{x+1}$; $f(x) = \dfrac{-2x+1}{x^2+1}$

$f(x) = -3\sqrt{-2x+3}$; $f(x) = \dfrac{-3}{x^2-4}$; $f(x) = \dfrac{4}{(-x^2+1)^3}$; $f(x) = \sqrt{x^2+x+1}$

$f(x) = \sqrt{-2x^2+3x-1}$; $f(x) = (-3x^2+2x)^4$; $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x+1}}$; $f(x) = \sqrt{3x+1}$

$f(x) = 2(x^3+2x)^3$; $f(x) = (x^2-x)\sqrt{-x^2+9}$; $f(x) = (x^2+x)^3(-x^2+1)^4$

Exercice 2

Soit f la fonction définie par $f(x) = (x-1)\sqrt{2x+1}$

1) Déterminer le domaine de définition de f.

2) a) Etudier la dérivabilité de f à droite en $-\frac{1}{2}$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

   b) Montrer que f est dérivable sur $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.

   c) Calculer alors $\lim\limits_{x \to 4} \frac{(x-1)\sqrt{2x+1}-9}{x-4}$

3) a) Dresser le tableau de variation de f.

   b) En déduire que f admet un minimum absolu que l'on précisera.

   c) Montrer alors que pour tout $x \in \left[-\frac{1}{2}, 1\right[$: $\sqrt{2x+1} \leq \frac{1}{1-x}$

Exercice 3

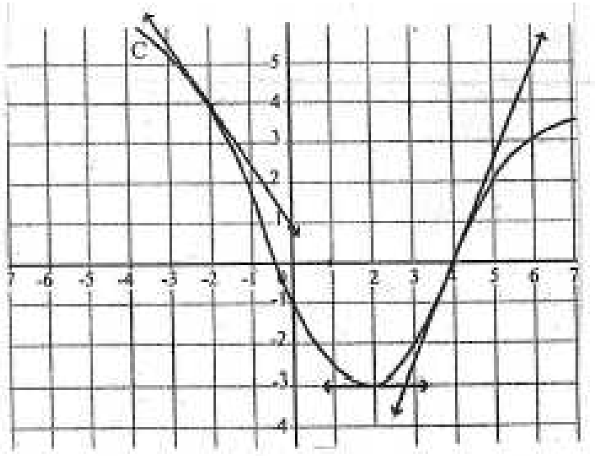
1) Soit f une fonction dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$ telle que la tangente à C_f au point d'abscisse 0 est Δ: $y = x + 4$. Soit g la fonction définie par $g = \sqrt{f}$ alors la tangente à C_g au point d'abscisse 0 a pour équation :

   a) $y = x + 2$ b) $y = \frac{1}{2}x + 4$ c) $y = \frac{1}{4}x + 2$

2) Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f'(1) = 1$ et soit g la fonction définie par : $g(x) = f(2x-1)$ alors : a) g n'est pas dérivable en 1 b) $g'(1) = 2$ c) $g'(1) = 1$

Exercice 4

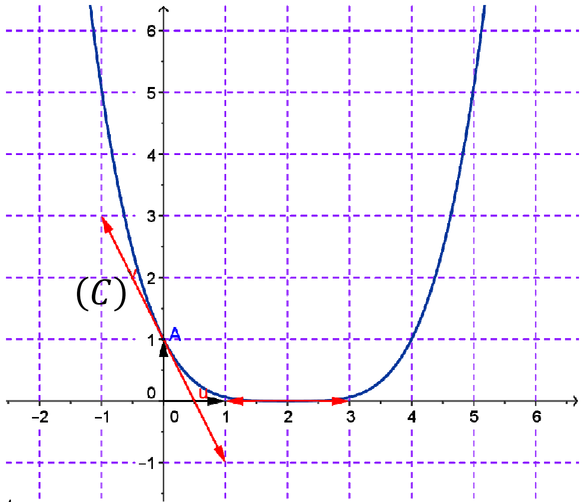
Le graphique ci-contre représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ et dérivable en -2 , 2 et 4.



1) Déterminer graphiquement $f(-2)$, $f(2)$ et $f(4)$.
2) Déterminer graphiquement $f'(-2)$, $f'(2)$ et $f'(4)$.
3) Déterminer $\lim\limits_{x\to-2} \frac{x^2+2x}{f(x)-4}$
4) En utilisant des approximations affines, donner une valeur approché des réels suivant : $f(-1{,}99)$ et $f(4{,}001)$.

Exercice 5

On donne ci-contre la courbe représentative (C) d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ ainsi que les tangentes à (C) aux points d'abscisses 0 et 2.



1) a) Par lecture graphique, calculer $f(0)$, $f(2)$, $f'(0)$ et $f'(2)$.

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to0} \frac{x^2-x}{f(x)-1}$

   c) En utilisant une approximation affine, donner une valeur approché du réel $f(0{,}0001)$.

2) On admet que : $\forall x \in \mathbb{R}$; $f(x) = (ax+1)^n$ où a est un Réel et $n \in \mathbb{N}^*\backslash\{1\}$.

   a) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   b) En utilisant ce qui précède, calculer a et n.

Exercice 6

Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{3x}{2x-1}$ On désigne par C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$, et que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\left\{\frac{1}{2}\right\}$; $f'(x) = \frac{-3}{(2x-1)^2}$
2) Soit la droite Δ: $y = -3x$.

   a) Montrer qu'il existe deux tangentes T_1 et T_2 à C_f parallèles à la droite Δ.

   b) Donner une équation cartésienne de chacune des tangentes T_1 et T_2

3) Existe-t-il des tangentes à C_f passant par le point $A(2\,,0)$?

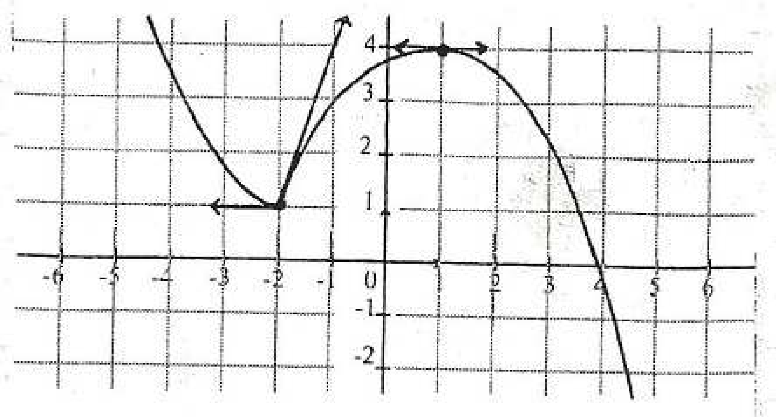
Exercice 7

Le graphique ci-dessous représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$.

1) La fonction f est-elle dérivable en -2 ?

2) Déterminer graphiquement $f'_g(-2)$; $f'_d(-2)$ et $f'(1)$

3) Dresser le tableau de variation de f.



Exercice 8

Dans la figure ci-dessous on a représenter graphiquement la courbe (C)d'une fonction f dans un repère $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$. La droite Δ: $y=\frac{1}{2}x+1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $+\infty$ et la droite Δ': $y=1$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

1) Justifier la dérivabilité de f en 0 et donner $f'(0)$.

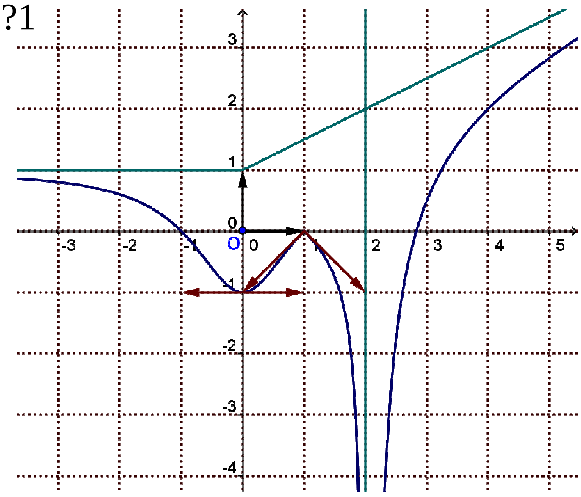
2) a) Justifier la dérivabilité de f à droite en 1 et donner $f'_d(1)$.

   b) Justifier la dérivabilité de f à gauche en 1 et donner $f'_g(1)$.

   c) La fonction f est-elle dérivable en 1 ? Pourquoi ?1

3) Donner les asymptotes à la courbe (C)

4) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-\frac{1}{2}x\right)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}(f(x)+x)$



Exercice 9

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x)=\sqrt{1-x}+1 & si\ x\leq 1 \\ f(x)=mx^2+2x-2 & si\ x>1 \end{cases}$

où m est un paramètre réel.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$

2) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ (On distinguera trois cas : $m > 0$, $m < 0$ et $m = 0$).

3) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles : $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$.

4) Pour quelle valeur de m ; f est continue en 1 ?

5) Dans la suite de l'exercice on prend $m = 1$.

a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

b) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

c) la fonction f est-elle dérivable en 1 ?

6) a) Justifier la dérivabilité de f en tout réel $x \in\,]-\infty\,,1[$. et calculer $f'(x)$.

b) Justifier la dérivabilité de f en tout réel $x \in\,]1\,,+\infty[$ et calculer $f'(x)$.

7) Donner une équation cartésienne de la tangente à (C) au point d'abscisse 0 .

8) Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ et A le point de (C) d'abscisse a. Déterminer le point A pour que la tangent T à (C) en A soit parallèle à la droite Δ: $y = -\frac{x}{2} + 1$.

Exercice 10

I/ Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2+3x}{x-1}$ On désigne par C_f la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O\,,\vec{\imath}\,,\vec{\jmath}\,)$.

1) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}\backslash\{1\}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$ on a $f'(x) = \frac{x^2-2x-3}{(x-1)^2}$

2) a) Déterminer les points de C_f où la tangente est parallèle à la droite $(O\,,\vec{\imath}\,)$.

b) Déterminer les points de C_f où la tangente est parallèle à la droite Δ: $y = -3x + 1$

II/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} g(x) = f(x) & si \quad x \le 0 \\ g(x) = \sqrt{x^2 + 2x} & si \quad x > 0 \end{cases}$

1) Montrer que g est continue en 0.

2) Etudier la dérivabilité de g en 0 et interpréter le résultat graphiquement.

3) a) Justifier que g est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$ et calculer $g'(x)$ sur chacun de ces intervalles.

b) Déterminer le signe de $g'(x)$ sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$.

c) Dresser le tableau de variation de g.

4) Déterminer les extrémums de g et préciser leurs natures.

Exercice 11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{x^3+2x+1}{2x-1} & si \;\; x > 1 \\ f(x) = x^2+3 & si \;\; x \leq 1 \end{cases}$

On désigne par (C_f) sa courbe représentative

1) a) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles$]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$

   b) Etudier la continuité de f en 1.

   c) Donner alors le domaine de continuité de f.

2) Montrer que f est dérivable sur chacun des intervalles $]-\infty\,,1[$ et $]1\,,+\infty[$.

3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

   b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 1.

   c) La fonction f est –elle dérivable en 1 ?

4) En déduire le domaine de dérivabilité de f.

5) Calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$

Exercice 12

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{1+x^2}{1-x} & si\; x < 0 \\ f(x) = 1 + x\sqrt{x} & si\; x \geq 0 \end{cases}$

On désigne par C_f sa courbe.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

   b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$

   c) Montrer que la droite $y = -x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $-\infty$.

2) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

3) a) Etudier la dérivabilité de f à gauche et à droite en 0. Conclure.

   b) Interpréter les résultats obtenus graphiquement.

   c) Calculer $f'(x)$ pour tout $\in \mathbb{R}^*$.

4) Ecrire les équations cartésiennes des demi tangentes T_1 et T_2 à C_f au point d'abscisse 0.

Exercice 13

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 + bx - 1 & si\; x < 0 \\ f(x) = 2\sqrt{x} - x + b + 1 & si\; x > 0 \\ f(0) = -1 \end{cases}$ $\qquad b \in \mathbb{R}$

1) Déterminer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$; $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - x)$

2) a) Montrer que f est continue sur chacun des intervalles $]-\infty\,,0[$ et $]0\,,+\infty[$

b) Déterminer b pour que f soit continue sur $\mathbb{R}$.

3) Dans la suite de l'exercice on prend $b = -2$.

a) Montrer que f est dérivable à gauche en 0 puis donner une équation cartésienne de la demi-tangente à C_f au point d'abscisse 0.

b) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0 et interpréter géométriquement le résultat obtenu.

4) a) Montrer que f est dérivable au point $a = 4$.

b) Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 4.

c) Déterminer le réel m pour que T soit perpendiculaire à la droite Δ_m: $mx - 2y + 1 = 0$

5) Soit $a \in]-\infty\,,0[$.

a) Calculer $f'(a)$ puis écrire une équation de la tangente T' à C_f au point d'abscisse a.

b) Montrer qu'il existe une seule tangente à C_f passant par le point A(0 , -5)

c) Donner une équation de cette tangente.

Exercice 14

La courbe ci-contre représentée est la courbe d'une fonction . Par lecture graphique répondre aux questions suivantes.

1) $D_f = \cdots$ 8) $f'_g(-2)$

2) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 9) $f'_d(-2)$

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ 10) $f'(0)$

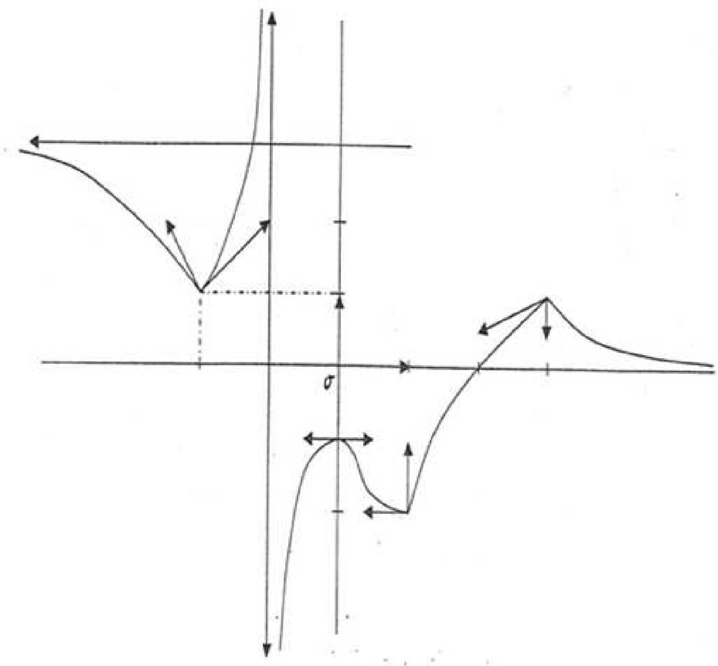
4) $\lim\limits_{x\to-1^-} f(x)$ 11) $f'_g(1)$

5) $\lim\limits_{x\to-1^+} f(x)$ 12) $f'_g(3)$

6) $\lim\limits_{x\to1^+} \frac{f(x)+2}{x-1}$ 13) $\lim\limits_{x\to3^+} \frac{f(x)-1}{x-3}$

7) Le domaine de continuité de f est

14) Le domaine de dérivabilité de f est



Exercice 15

La courbe C_f ci-dessous représentée est la courbe d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$

* La droite Δ d'équation $y = x - 4$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$.

* La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote à C_f.

* La droite T est la tangente à C_f au point A.

* La courbe C_f admet deux demi tangentes au point B et une tangente horizontale au point C .

1) Déterminer $\lim_{x \to 0^+} f(x)$; $\lim_{x \to +\infty} (f(x) - x)$

2) a) Déterminer $f'(1)$; $f'(2)$ et $f'_d(-1)$

   b) Donner une approximation affine de $f(0{,}998)$

3) Déterminer $\lim_{x \to -1^-} \frac{f(x)-1}{x+1}$

4) Soit g la fonction définie sur $]0\,,2[$ par $g(x) = \sqrt{f(x)} + x$

   a) Montrer que $\lim_{x \to 1} \frac{g(x)-g(1)}{x-1} = -\frac{1}{2}$

   b) Donner alors une équation cartésienne de la tangente à la courbe de g au point d'abscisse 1.