Devoir de synthèse n° 1 : Bac Maths
Durée 3 h

Pr : Ben fredj sofiane

Exercice $\boxed{1}$. **(3 points).** Répondre par vrai ou faux, en justifiant la réponse.

1– Si f est continue en 1 alors f est dérivable en 1.

2– Si $f(0) = 0$ et si f est dérivable en 0 alors la suite de terme général $n \times f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente.

3– D et D′ sont deux droites perpendiculaires alors : $S_D \circ S_{D'} = S_{D'} \circ S_D$.

Exercice $\boxed{2}$. **(5 points).** Dans tout l'exercice, $(O; \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ est un repère orthonormal direct du plan complexe (unité graphique : 3 cm).

On désigne par A et Ω les points d'affixes $z_A = 1$ et $z_\Omega = 1+i\sqrt{3}$.

1. On considère la transformation T du plan qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M′ d'affixe z′ tel que $z' = -\bar{z} + 2$.
   (a) Montrer que T est une isométrie du plan.
   (b) Déterminer les images respectives par la transformation T du point A et du point Ω.
   (c) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de la transformation T.
   (d) Déterminer l'image par la transformation T du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1.
2. $\mathscr{C}'$ désigne le cercle de centre O′ d'affixe 2 et de rayon 1.
   (a) À tout point M du cercle $\mathscr{C}$ d'affixe z, on associe le point M_1 du cercle $\mathscr{C}'$ d'affixe z_1 tel que: $\left(\widehat{\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{O'M_1}}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.
   Déterminer le module et un argument de $\frac{z_1 - 2}{z}$. En déduire que $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$.
   (b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de la transformation r qui à tout point M du plan d'affixe z associe le point M_1 d'affixe z_1 telle que $z_1 = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2$.
3. (a) Déterminer l'écriture complexe de la transformation du plan $T \circ r$.
   (b) Déduire la forme complexe de la symétrie orthogonale d'axe (ΩO).

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ $\boxed{3}$. **(5 points)** Soit f la fonction définie sur l'intervalle $I = \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ par :

$$f(x) = \tan x.$$

On note g la fonction réciproque de f.

1. Montrer que g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$
2. Donner le tableau de variation de g.
3. Montrer que g est impaire.
4. Pour tout réel $x \in]-1, +\infty[$ on pose : $h(x) = g\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) - g(x)$.
   (a) Calculer $h(0)$.
   (b) Montrer que h est dérivable sur $]-1, +\infty[$ puis calculer $h'(x)$.
   (c) Déduire que pour tout réel x, $\quad g\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) = g(x) - \dfrac{\pi}{4}$.
5. Calculer : $g\left(\dfrac{\sqrt{3}-3}{3+\sqrt{3}}\right) + g\left(\dfrac{\sqrt{3}+3}{\sqrt{3}-3}\right)$

$\boxed{\textbf{Exercice}}$ $\boxed{4}$. **(6 points)** On donne dans la figure ci-jointe (**feuille annexe page 3**) La courbe (Γ) représentative dans un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$, d'une fonction f définie et continue sur l'intervalle $]0, +\infty[$ et dérivable en 1.

- La droite $\mathscr{T}$ est la tangente à (Γ) au point d'abscisse 1.
- Γ admet au voisinage de $+\infty$ une branche parabolique de direction $(O; \vec{i})$.
- La droite des ordonnés est une asymptote à Γ.

On suppose en outre que f possède la propriété (1) ci dessous.

$$\text{Pour tous réels } x, y \text{ de l'intervalle }]0, +\infty[,\ f(xy) = f(x) + f(y) \qquad (1)$$

1− A l'aide du graphique :

(a) Donner la limite de f à droite en 0 et la limite de f en $+\infty$.
(b) Préciser les nombres $f(1)$ et $f'(1)$.

2− (a) Soit h un réel non nul tel que pour tout réel $x > 0$, on a $x + h > 0$.

En posant $y = 1 + \dfrac{h}{x}$ et en utilisant (1) montrer que :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{x}\times\frac{f\left(1+\dfrac{h}{x}\right)}{\dfrac{h}{x}}$$

(b) Déduire que f est dérivable en x et que $f'(x)=\dfrac{1}{x}$.

3– Soit a un réel strictement positif donné et soit T_a la tangente à (Γ) au point M d'abscisse a.

(a) Écrire une équation cartésienne de T_a.

(b) T_a coupe l'axe des ordonnées en un point Q et soit H le projeté orthogonal de M sur la droite des ordonnées. Montrer que $HQ = 1$.

(c) Donner un procédé géométrique qui permet de construire la tangente T_3 à (Γ) au point d'abscisse 5.

(d) Construire T_5

4– Pour tout $n \geq 1$, on pose : $H_n = 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}+...+\dfrac{1}{n}$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n+1} \leq f(n+1)-f(n) \leq \dfrac{1}{n}$

(b) Déduire que pour tout $n \geq 1$, $H_n - 1 \leq f(n) \leq H_n - \dfrac{1}{n}$

(c) Calculer alors $\lim\limits_{n\to+\infty} H_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{H_n}{f(n)}$

PRÉNOM :................

NOM :................

Feuille annexe à rendre.