

Exercice 1 (6 pts)

- 1) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation : (E) : $iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$.
- 2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$ on pose : $f(z) = iz^3 + (1 - 3i)z^2 - (4 - 3i)z + 3 + i$
 - a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une unique solution imaginaire pure que l'on déterminera.
 - b) Déterminer les nombres complexes a , b et c tels que :
 $\forall z \in \mathbb{C}; f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$.
 - c) Résoudre dans \mathbb{C} l'équation $f(z) = 0$.
- 3) a) Ecrire sous forme exponentielle le nombre complexe : $1 + i\sqrt{3}$
 b) En déduire la forme exponentielle de chacun des complexes suivants :
 $3 + i\sqrt{3}$ et $2i - (1 + i\sqrt{3})$

Exercice 2 (7 pts)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) . On considère les points A et B d'affixes respectives : $z_A = \sqrt{3} + i$ et $z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$.

- 1) a) Montrer que les points O, A et B ne sont pas alignés.
 b) Déterminer l'affixe z_G du point G centre du triangle O A B.
 c) Déterminer l'écriture exponentielle du complexe z_A .
- 2) Soit C le point du plan tel que : $OA = OC$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$
 - a) Montrer que $|z_C| = 2$ et $\arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ où z_C est l'affixe du point C.
 - b) En déduire que $z_C = 1 + i\sqrt{3}$
- 3) a) Montrer que O A B C est un losange.
 b) O A B C est-il un carré ?
- 4) Déterminer et construire l'ensemble $E = \left\{ M(z) \in P / \arg\left(\frac{z - z_A}{z - z_C}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \right\}$

Exercice 3 (7 pts)

- 1) Soit la fonction g définie sur $[0, \pi]$ par : $g(x) = -9x \sin x - 9 \cos x + 12$
- Vérifier que : $\forall x \in [0, \pi]; g'(x) = -9x \cos x$.
 - Dresser le tableau de variation de g sur $[0, \pi]$.
 - Déterminer les images par la fonction g des intervalles $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$.
 - Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet dans $[0, \pi]$ exactement deux solutions qu'on notera α et β .
- 2) Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{3 \cos x - 4}{3x}$.
- Montrer que $\forall x \in]0, +\infty[; \frac{-7}{3x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{3x}$.
 - Montrer que $\forall x \in]-\infty, 0[; \frac{-1}{3x} \leq f(x) \leq \frac{-7}{3x}$.
 - Déduire les valeurs des limites suivantes : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x)$.
- 3) a) Vérifier que : $\forall x \in]0, \pi]; f'(x) = \frac{g(x)}{9x^2}$.
- b) Déterminer alors le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $]0, \pi]$.

Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) (E): $iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$

$a = i; \quad b = -3i; \quad c = 3i - 1$

$\Delta = b^2 - 4a = (-3i)^2 - 4i(3i - 1) = -9 + 12 + 4i = 3 + 4i = 2^2 + 2 \times 2 \times i + i^2$
 $= (2 + i)^2$ donc $\delta = 2 + i$

$z' = \frac{-b - \delta}{2a} = \frac{3i - 2 - i}{2i} = \frac{-2 + 2i}{2i} = \frac{-1 + i}{i} = 1 + i$

$z'' = \frac{-b + \delta}{2a} = \frac{3i + 2 + i}{2i} = \frac{2 + 4i}{2i} = \frac{1 + 2i}{i} = 2 - i$

Alors $S_{\mathbb{C}} = \{1 + i; 2 - i\}$

2) a) $f(z) = iz^3 + (1 - 3i)z^2 - (4 - 3i)z + 3 + i$

Soit $z_0 = \alpha i$ ($\alpha \in \mathbb{R}$) une solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$

On a $f(z) = 0 \Leftrightarrow i(i\alpha)^3 + (1 - 3i)(i\alpha)^2 - (4 - 3i)i\alpha + 3 + i = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2(1 - 3i) - 4i\alpha - 3\alpha + 3 + i = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + 3i\alpha - 4i\alpha - 3\alpha + 3 + i = 0$

$\Leftrightarrow \alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 3 + (-\alpha + 1)i = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + 1 = 0 & (1) \\ \alpha^3 - \alpha^2 - 3\alpha + 3 = 0 & (2) \end{cases}$

$\alpha = 1$ est une solution de l'équation (2) donc $z_0 = i$ est l'unique solution imaginaire pure de l'équation $f(z) = 0$

b) On a $f(z) = iz^3 + (1 - 3i)z^2 - (4 - 3i)z + 3 + i$

$f(z) = (z - i)(az^2 + bz + c) = az^3 + bz^2 + cz - iaz^2 - ibz - ic$
 $= az^3 + (b - ia)z^2 + (c - ib)z - ic$

Par identification on a : $\begin{cases} a = i \\ b - ia = 1 - 3i \\ c - ib = -4 + 3i \\ -ic = 3 + i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = i \\ b = -3i \\ c = -1 + 3i \\ -ic = 3 + i \end{cases}$

Donc $a = i; \quad b = -3i$ et $c = -1 + 3i$

Alors $f(z) = (z - i)(iz^2 - 3iz + 3i - 1)$

$$c) f(z) = 0 \Leftrightarrow (z - i)(iz^2 - 3iz + 3i - 1) = 0$$

alors $z - i = 0$ ou $iz^2 - 3iz + 3i - 1 = 0$ alors $z = 0$ ou $z = 1 + i$ ou $z = 2 - i$

donc $S_{\mathbb{C}} = \{i; 1 + i; 2 - i\}$

$$3) a) 1 + i\sqrt{3} = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$$

$$b) 3 + i\sqrt{3} = 2 + 1 + i\sqrt{3} = 2 + 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(1 + e^{i\frac{\pi}{3}} \right) = 2 \left(e^{i0} + e^{i\frac{\pi}{3}} \right)$$

$$= 2e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{-i\frac{\pi}{6}} + e^{i\frac{\pi}{6}} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} \left(e^{i\frac{\pi}{6}} + e^{-i\frac{\pi}{6}} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}} 2 \cos \frac{\pi}{6} = 4 \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}} = 2\sqrt{3} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$2i - (1 + i\sqrt{3}) = 2e^{i\frac{\pi}{2}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}} = 2 \left(e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{i\frac{\pi}{3}} \right)$$

$$= 2e^{i\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} \left(e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6}\right)} - e^{i\left(-\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{6}\right)} \right) = 2e^{i\frac{5\pi}{12}} \left(e^{i\frac{\pi}{12}} - e^{-i\frac{\pi}{12}} \right)$$

$$= 2e^{i\frac{5\pi}{12}} 2i \sin \frac{\pi}{12} = 4e^{i\frac{5\pi}{12}} e^{i\frac{\pi}{2}} \sin \frac{\pi}{12} = 4e^{i\frac{11\pi}{12}} \sin \frac{\pi}{12} = 4 \sin \frac{\pi}{12} e^{i\frac{11\pi}{12}}$$

Exercice 2

$$1) a) z_A = \sqrt{3} + i \quad z_B = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)$$

$$\frac{z_{\overrightarrow{OB}}}{z_{\overrightarrow{OA}}} = \frac{z_B}{z_A} = \frac{\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)}{\sqrt{3} + i} = \frac{[\sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)](\sqrt{3} - i)}{(\sqrt{3} + i)(\sqrt{3} - i)}$$

$$= \frac{3 - i\sqrt{3} + \sqrt{3} - i\sqrt{3} + 1}{3 + 1} = \frac{4 + \sqrt{3} - 2i\sqrt{3}}{4} \notin \mathbb{R}$$

Donc \overrightarrow{OA} et \overrightarrow{OB} ne sont pas colinéaires par suite O, A et B ne sont pas alignés

$$b) \text{ On a } G \text{ centre de gravité du triangle } OAB \text{ donc } \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\text{donc } z_{\overrightarrow{GO}} + z_{\overrightarrow{GA}} + z_{\overrightarrow{GB}} = 0 \quad \text{donc } -z_G + z_A - z_G + z_B - z_G = 0$$

$$\text{donc } -3z_G + z_A + z_B = 0 \quad \text{alors}$$

$$z_G = \frac{z_A + z_B}{3} = \frac{\sqrt{3} + i + \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1)}{3} = \frac{1 + 2\sqrt{3} + i(\sqrt{3} + 2)}{3}$$

$$c) z_A = \sqrt{3} + i = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right) = 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$2) a) |z_C| = OC = OA = |z_A| = 2$$

$$\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OC} \right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \Leftrightarrow \left(\overrightarrow{OA}, \vec{u} \right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OC} \right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \Leftrightarrow - \left(\vec{u}, \overrightarrow{OA} \right) + \left(\vec{u}, \overrightarrow{OC} \right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow -\arg(z_A) + \arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z_C) \equiv \arg(z_A) + \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

$$\Leftrightarrow \arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} [2\pi] \Leftrightarrow \arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$$

$$\text{b) } \begin{cases} |z_C| = 2 \\ \arg(z_C) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow z_C = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = 2 \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 1 + i\sqrt{3}$$

$$\text{3) a) } z_{\overrightarrow{CB}} = z_B - z_C = \sqrt{3} + 1 + i(\sqrt{3} + 1) - 1 - i\sqrt{3} = \sqrt{3} + i = z_A = z_{\overrightarrow{OA}}$$

$$z_{\overrightarrow{CB}} = z_{\overrightarrow{OA}} \Leftrightarrow \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow OABC \text{ est un parallélogramme (1)}$$

$$OA = OC \quad (2)$$

De (1) et (2) $OABC$ est un losange

$$\text{b) } \frac{z_{\overrightarrow{OA}}}{z_{\overrightarrow{OC}}} = \frac{z_A}{z_C} = \frac{\sqrt{3}+i}{1+i\sqrt{3}} = \frac{(\sqrt{3}+i)(1-i\sqrt{3})}{(1+i\sqrt{3})(1-i\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{3}-3i+i+\sqrt{3}}{1+3} = \frac{2\sqrt{3}-2i}{4} \notin i\mathbb{R} \text{ donc } \overrightarrow{OA} \text{ et}$$

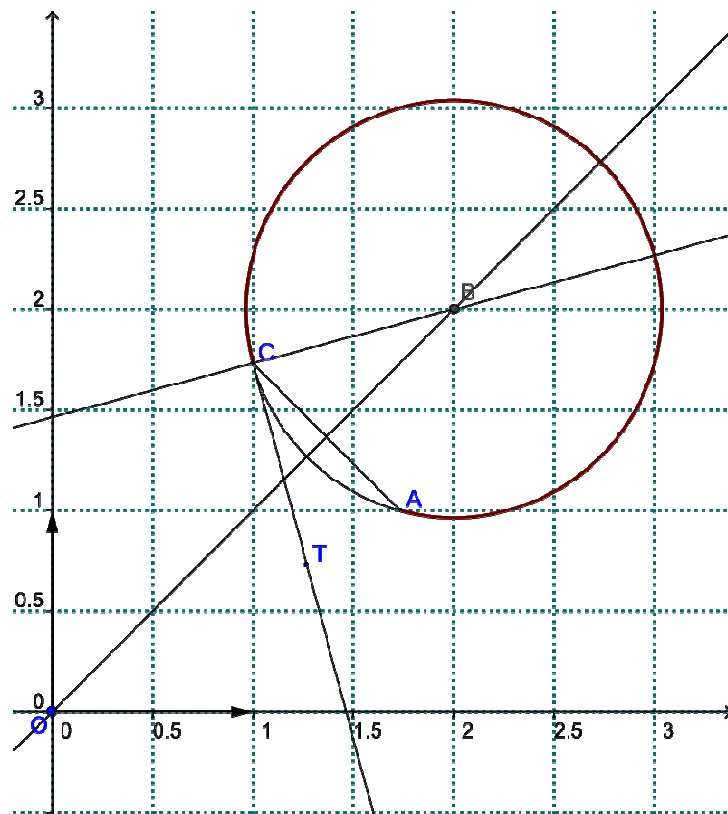
\overrightarrow{OC} ne sont pas orthogonaux alors $OABC$ n'est pas un carré

4)

$$M(z) \in E \Leftrightarrow \frac{z - z_A}{z - z_C} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \Leftrightarrow \frac{z_M - z_A}{z_M - z_C} \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi] \Leftrightarrow (\widehat{MC, MA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

E est l'arc $[\widehat{AC}]$ privé des points A et C du cercle passant par A et C et tangent à (CT) en C tel que :

$$(\widehat{CT, CA}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$$

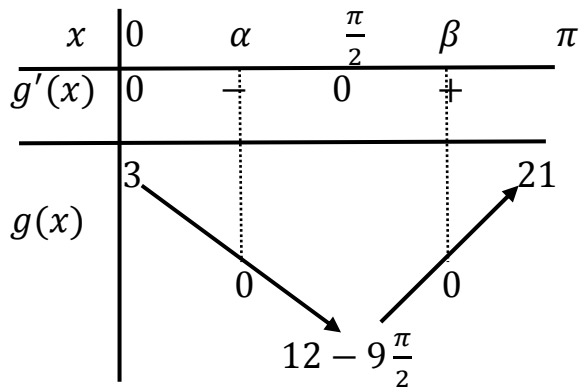


Exercice 3

1) a) $\forall x \in [0, \pi]; g'(x) = (-9x \sin x - 9 \cos x + 12)'$
 $= -9 \sin x - 9x \cos x + 9 \sin x$
 $= -9x \cos x$

b) Pour tout $x \in [0, \pi]; g'(x) = -9x \cos x$

alors $g'(x)$ est du signe de $-\cos x$ sur $[0, \pi]$



c) $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[12 - 9\frac{\pi}{2}, 3\right]$ $g\left(\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]\right) = \left[12 - 9\frac{\pi}{2}, 21\right]$

d) g est continue et strictement décroissante sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ et $0 \in \left[12 - 9\frac{\pi}{2}, 3\right]$ alors

$g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

g est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$ et $0 \in \left[12 - 9\frac{\pi}{2}, 21\right]$ alors $g(x) = 0$

admet une unique solution β dans $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$

Conclusion : $g(x) = 0$ admet exactement deux solutions α et β dans $[0, \pi]$

2) a) $\forall x \in]0, +\infty[\quad -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\cos x \leq 3 \Rightarrow -7 \leq 3 \cos x - 4 \leq -1$

$\Rightarrow \frac{-7}{3x} \leq \frac{3 \cos x - 4}{3x} \leq \frac{-1}{3x}$ (car $x \in]0, +\infty[$) $\Rightarrow \frac{-7}{3x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{3x}$

b) $\forall x \in]-\infty, 0[\quad -1 \leq \cos x \leq 1 \Rightarrow -3 \leq 3\cos x \leq 3 \Rightarrow -7 \leq 3 \cos x - 4 \leq -1$

$\Rightarrow \frac{-1}{3x} \leq \frac{3 \cos x - 4}{3x} \leq \frac{-7}{3x}$ (car $x \in]-\infty, 0[$) $\Rightarrow \frac{-1}{3x} \leq f(x) \leq \frac{-7}{3x}$

c) $\forall x \in]0, +\infty[$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-7}{3x} \leq f(x) \leq \frac{-1}{3x} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-7}{3x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-1}{3x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \leq \frac{-1}{3x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-1}{3x} = -\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$$

$$\forall x \in]-\infty, 0[$$

$$\left. \begin{array}{l} \frac{-1}{3x} \leq f(x) \leq \frac{-7}{3x} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-7}{3x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-1}{3x} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} f(x) \geq \frac{-1}{3x} \\ \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-1}{3x} = +\infty \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = +\infty$$

3) a)

$$\forall x \in]0, \pi]; f'(x) = \left(\frac{3 \cos x - 4}{3x} \right)' = \frac{-3 \sin x(3x) - 3(3 \cos x - 4)}{9x^2}$$

$$= \frac{-9x \sin x - 9 \cos x + 12}{9x^2} = \frac{g(x)}{9x^2}$$

b) $\forall x \in]0, \pi]; f'(x) = \frac{g(x)}{9x^2}$ donc $f'(x)$ est du signe de $g(x)$ sur $]0, \pi]$

x	0	α	β	π
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$+$
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$f(\beta)$	$\frac{-7}{3\pi}$