REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◈◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Correction de l'épreuve de **MATHEMATIQUES** Durée : **4 H** Coefficient : **4**
Section **: MATHEMATIQUES**	**SESSION PRINCIPALE**

Exercice 1 :

1) (A_1) **Vrai** en effet : $33n \equiv 0[2013]$ alors $33n = 2013\,k$; $k \in \mathbb{Z}$. alors $n = 61\,k$ alors $n \equiv 0[61]$.

(A_2) **Vrai** en effet : $33 \wedge 11 = 11$ et 11 divise 2013 donc $33x + 11y = 2013$ admet des solutions dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$.

2) (A_3) **Vrai** en effet : la fonction $f : x \mapsto \dfrac{e^t}{1+t^2}$ est définie et continue sur IR .

$u : x \to \ln(x)$ est dérivable sur $]\,0\,,+\infty\,[$ et $u(]\,0\,,+\infty\,[) = IR$ alors F est définie et dérivable sur $]\,0\,,+\infty\,[$.

(A_4) **Faux** $F'(x) = \dfrac{1}{x}\times\dfrac{e^{\ln(x)}}{1+(\ln(x))^2} = \dfrac{1}{x}\times\dfrac{x}{1+(\ln(x))^2} = \dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$.

Exercice 2 :

OAB est un triangle rectangle en B de sens direct tel que $\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$ et $\left(\widehat{\overrightarrow{BO},\overrightarrow{BA}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$

A) f est une similitude direct de centre O.

1) f (O) = O et f (B) = A donc une mesure de l'angle de f est $\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right)\equiv-\left(\widehat{\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB}}\right)[2\pi]\equiv-\dfrac{\pi}{3}[2\pi]$

Le rapport de f est $\dfrac{OA}{OB}=\dfrac{1}{\cos\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1}{\frac{1}{2}}=2$. Donc f est une similitude directe d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ et de rapport 2.

2) f (A) = C et f (B) = A .

a)
$$\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AB}}\right)+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\pi-\left(\widehat{\overrightarrow{OB},\overrightarrow{OA}}\right)-\left(\widehat{\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BO}}\right)+\pi+\left(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{CA}}\right)[2\pi]$$
$$\equiv\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}[2\pi]\equiv\frac{\pi}{2}[2\pi]$$

Donc OCA est un triangle rectangle en A de sens direct.
De plus f (A) = C et f (B) = A de plus f est une similitude directe de rapport 2 alors AC = 2 BA = 2 AB .

b) Comme $\left(\widehat{\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AC}}\right)\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]$ donc C est un point de la demi droite perpendiculaire à (AO) en A de sens direct .

AC = 2 AB alors C est un point du cercle de centre A et de rayon 2AB. D'où la construction de C.

B) g est la similitude indirecte tel que g (B) = A et g (A) = C ; g (Ω) = Ω .

1) a) g est la similitude indirecte. g(B) = A et g(A) = C donc le rapport de g est $\dfrac{BA}{AC}=2$.

Comme $g\circ g = h_{(\Omega,4)}$ et $g\circ g(B) = g(A) = C$ donc $h_{(\Omega,4)}(B) = C$ ainsi $\overrightarrow{\Omega C} = 4\,\overrightarrow{\Omega B}$

b) $\overrightarrow{\Omega C} = 4\,\overrightarrow{\Omega B} \Leftrightarrow -4\,\overrightarrow{\Omega B}+\overrightarrow{\Omega C}=\vec{0}$ donc Ω est le barycentre des points pondérés $(B\,,\,-4)$ et $(C\,,1)$ d'où $\overrightarrow{\Omega B}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BC}$.

2) a) G est le barycentre des points pondérés $(A\,,1)$ et $(B\,,2)$ donc

$\overrightarrow{GA}+2\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{BA}+2\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\,\overrightarrow{GB}=-\overrightarrow{BA}$ d'où $\overrightarrow{BG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$

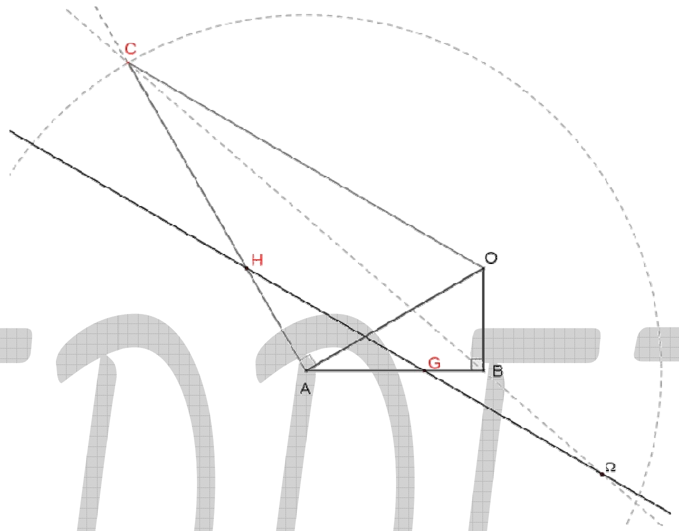
$\overrightarrow{GB}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ donc $\overrightarrow{g(G)g(B)}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{g(B)g(A)}$ or $g(G)=H$, $g(B)=A$ et $g(A)=C$ d'où $\overrightarrow{AH}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

b) $\overrightarrow{BG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{AH}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{\Omega B}$

$$\overrightarrow{G\Omega}+\overrightarrow{GH}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{B\Omega}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{GB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{GA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=2\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GA}=\vec{0}$$

D'où G est le milieu du segment [ΩH]

c) comme G est le milieu du segment [ΩH] donc $\overrightarrow{\Omega H}=2\ \overrightarrow{\Omega G}$ et g est la similitude indirecte de centre Ω et de rapport 2 et avec g (G) = H d'où (GH) est l'axe de g .



Exercice 3 :

I(1 , 1 , 0) ; J (0 , 1 , 1) et K (1 , 0 , -1)

1) a) $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

b) $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\neq\vec{0}$ donc I, J et K non alignés ainsi I, J et K définissent un plan P.

$\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de P donc P : x – y + z + d = 0 or I(1 , 1 , 0) ∈ P donc d = 0 d'où P a pour équation cartésienne : x – y + z = 0 .

2) Soit S (1 , -1 , 1) on pose V_1 le volume de SIJK, $V_1=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}\right|$ avec $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IS}\begin{pmatrix}0\\-2\\1\end{pmatrix}$

$$V_1=\frac{1}{6}\left|1\times0+(-1)\times(-2)+1\times1\right|=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$$

3) Δ est la droite passant par I et parallèle à (JK) de vecteur directeur $\overrightarrow{JK}$.

a) $\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}=\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\right)\wedge\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IK}\right)=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{IK}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$

$$=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{IK}-\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}=\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{JK}+\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$$

Or M ∈ Δ : est la droite passant par I et parallèle à (JK) donc $\overrightarrow{MI}\wedge\overrightarrow{JK}=\vec{0}$ d'où $\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}=\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}$

b) on pose V_2 le volume de SMJK.

$$V_2=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{MJ}\wedge\overrightarrow{MK}\right).\overrightarrow{MS}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{MS}\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\left(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IS}\right)\right|=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{MI}+\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}\right|$$

or le vecteur $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\perp\overrightarrow{JK}$ et M ∈ Δ la droite passant par I et de vecteur directeur $\overrightarrow{JK}$ donc $\overrightarrow{MI}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\perp\overrightarrow{MI}$ ainsi $\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{MI}=0$ d'où $V_2=\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{IJ}\wedge\overrightarrow{IK}\right).\overrightarrow{IS}\right|=V_1=\frac{1}{2}$

4) $h=h_{(S,2)}$

a) h (P) = P' où P' est un plan parallèle à P donc P' : x – y + z + d' = 0

Or I ∈ P donc h(I) = I' ∈ P'. $I'(x,y,z)=h(I)\Leftrightarrow\overrightarrow{SI'}=2\ \overrightarrow{SI}\Leftrightarrow\begin{cases}x-1=0\\y+1=4\\z-1=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=3\\z=-1\end{cases}$ d'où $I'(1\,,3\,,\,-1)$

I'∈P' donc $1-3-1+d'=0\Leftrightarrow d'=3$ d'où P' : x – y + z + 3 = 0.

b) $\{M\} = P \cap [SM]$ donc $\{h(M)\} = h(P) \cap h([SM])$ or $h(P) = P'$ et $h([SM]) = [SM]$

D'où $\{h(M)\} = P' \cap [SM] = \{M'\}$ ainsi $h(M) = M'$ de même on démontre que $h(J) = J'$ et $h(K) = K'$ et comme $h(S) = S$ donc le tétraèdre SM'J'K' est l'image de SMIJK par l'homothétie h de rapport 2.

On pose V_3 le volume de SM'J'K' donc $V_3 = 2^3 V_2 = 8 \times \frac{1}{2} = 4$

On pose V_4 le volume de SMJKM'J'K' donc $V_4 = V_3 - V_2 = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$

Exercice 4 :

E et F d'affixes respectives 1 et i .

C_1 est le cercle de centre E et de rayon 1 et C_2 est le cercle de centre F et de rayon 1.

$\theta \in [0\ ,\ 2\pi[$, M le point d'affixe $1 + e^{i\theta}$ et N le point d'affixe $i\ (\ 1 + e^{i\theta}\ )$.

1) a) $\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right) = z_M - z_E = 1 + e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta}$ et $\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right) = z_N - z_F = i\left(1 + e^{i\theta}\right) - i = i + ie^{i\theta} - i = ie^{i\theta}$

b) $EM = |z_M - z_E| = \left|e^{i\theta}\right| = 1$ et $\theta \in [0\ ,\ 2\pi[$ donc M varie sur le cercle de centre E et de rayon 1 c'est à dire C_1

$FN = |z_N - z_F| = \left|ie^{i\theta}\right| = 1$ et $\theta \in [0\ ,\ 2\pi[$ donc N varie sur le cercle de centre F et de rayon 1 c'est à dire C_2

c) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FN}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)} = \dfrac{ie^{i\theta}}{e^{i\theta}} = i$ est imaginaire pur alors $\overrightarrow{EM} \perp \overrightarrow{FN}$ donc (EM) et (FN) sont perpendiculaires .

2) P est le point d'affixe $z_P = (1-i)\sin\theta e^{i\theta}$.

a) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)} = \dfrac{z_P - z_E}{z_M - z_E} = \dfrac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta} - 1}{e^{i\theta}} = (1-i)\sin\theta - e^{-i\theta} = \sin\theta - \cancel{i\sin\theta} - \cos\theta + \cancel{i\sin\theta} = \sin\theta - \cos\theta$

$\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FM}\right)} = \dfrac{z_P - z_F}{z_M - z_F} = \dfrac{(1-i)\sin\theta e^{i\theta} - i}{ie^{i\theta}} = -i(1-i)\sin\theta - e^{-i\theta} = \cancel{-i\sin\theta} - \sin\theta - \cos\theta + \cancel{i\sin\theta} = -\sin\theta - \cos\theta$

b) $\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{EM}\right)} \in$ IR donc les droites (EP) et (EM) sont parallèles et par suite $P \in$ (EM) .

$\dfrac{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FP}\right)}{\text{Aff}\left(\overrightarrow{FM}\right)} \in$ IR donc les droites (FP) et (FN) sont parallèles et par suite $P \in$ (FN) .

D'où P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN) .

Exercice 5 :

I. 1) a) Soit φ la fonction définie sur IR* par $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{e^x\left(1 - e^{-x}\right)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{1 - e^{-x}} = 1$

La courbe C_φ admet deux asymptotes horizontales : la droite d'équation y = 0 au voisinage de – ∞ et la droite d'équation y = 1 au voisinage de + ∞.

b) $\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^-} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = -\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^-} e^x - 1 = 0$ et $e^x < 1$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{e^x}{e^x - 1} = +\infty$ car $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0$ et $e^x > 1$

Ainsi la droite d'équation x = 0 est une asymptote verticale à C_φ.

c) φ est une fonction définie dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$.

$$\forall x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[,\ \ \varphi'(x)=\frac{e^{x}\left(e^{x}-1\right)-e^{x}\times e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}=-\frac{e^{x}}{\left(e^{x}-1\right)^{2}}\ \text{ donc } \forall x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[,\ \ \varphi'(x)<0$$

D'où la fonction φ est strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ et sur $]0,+\infty[$

2) on pose $h(x)=\varphi(x)-x$. La fonction h est définie dérivable sur $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

$h'(x)=\varphi'(x)-1$ comme $\forall x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[,\ \varphi'(x)<0$ donc $\forall x\in]-\infty,0[\cup]0,+\infty[,\ h'(x)<0$ donc h est strictement décroissante $]-\infty,0[\cup]0,+\infty[$

La fonction h est définie continue strictement décroissante sur $]-\infty,0[$ donc $h\left(]-\infty,0[\right)=\left]\lim\limits_{0^+}h,\lim\limits_{-\infty}h\right[$

Or $\lim\limits_{x\to-\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\varphi(x)-x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^-}h(x)=\lim\limits_{x\to0^-}\varphi(x)-x=-\infty$ ainsi $h\left(]-\infty,0[\right)=]-\infty,+\infty[$ d'où l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique α sur $]-\infty,0[$ et par suite $\varphi(x)=x$ admet une solution unique α dans $]-\infty,0[$.

La fonction h est définie continue strictement décroissante sur $]0,+\infty[$ donc $h\left(]0,+\infty[\right)=\left]\lim\limits_{+\infty}h,\lim\limits_{0^+}h\right[$

$\lim\limits_{x\to+\infty}h(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)-x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to0^+}h(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\varphi(x)-x=+\infty$ ainsi $h\left(]0,+\infty[\right)=]-\infty,+\infty[$ d'où l'équation $h(x)=0$ admet une solution unique β sur $]0,+\infty[$ et par suite $\varphi(x)=x$ admet une solution unique β dans $]0,+\infty[$.

II. 1) a) la fonction f est définie, dérivable sur IR . pour tout $x\in$ IR , $f'(x)=e^{x}-1$

donc Δ_a : $y=(e^{a}-1)(x-a)+e^{a}-a$ ainsi $\Delta_a : y=(e^{a}-1)x+e^{a}(1-a)$

La fonction g est définie, dérivable sur $]0,+\infty[$. pour tout $x\in\ ]0,+\infty[$, $g'(x)=-1+\dfrac{1}{x}$

Donc $D_b : y=\left(-1+\dfrac{1}{b}\right)(x-b)+1-b+\ln b$ ainsi $D_b : y=\left(-1+\dfrac{1}{b}\right)x+\ln b$

b) (Δ_a et D_b sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux) $\Leftrightarrow\left(-1+\dfrac{1}{b}=e^{a}-1\right)$

$$\Leftrightarrow\left(\frac{1}{b}=e^{a}\right)\Leftrightarrow\left(b=e^{-a}\right)$$

2) a) Δ_a et D_b sont parallèles.

(Δ_a et D_b sont confondues) si et seulement si**(** Δ_a et D_b sont parallèles et leurs ordonnées à l'origine sont égales)

$\Leftrightarrow\left(a\neq0 \text{ et } e^{a}(1-a)=\ln e^{-a}\right)\Leftrightarrow\left(a\neq0 \text{ et } e^{a}(1-a)=-a\right)$

$$\Leftrightarrow\left(a\neq0 \text{ et } e^{a}-ae^{a}=-a\right)\Leftrightarrow\left(a\neq0 \text{ et } e^{a}=a\left(e^{a}-1\right)\right)\Leftrightarrow\left(a\neq0 \text{ et } a=\frac{e^{a}}{e^{a}-1}\right)$$

b) d'après 2) a) Δ_a et D_b sont confondues donc $a\neq0$ et $a=\dfrac{e^{a}}{e^{a}-1}\Leftrightarrow a\neq0$ et $\varphi(a)=a$ ainsi a est la solution de l'équation $\varphi(x)=x$ donc on prend $a=\alpha$ ainsi Δ_α est une tangente commune à C_f et à C_g en A (α , f (α)) et en B (b , g (b)) comme b = $e^{-\alpha}$ donc B($e^{-\alpha}$, g($e^{-\alpha}$)) .

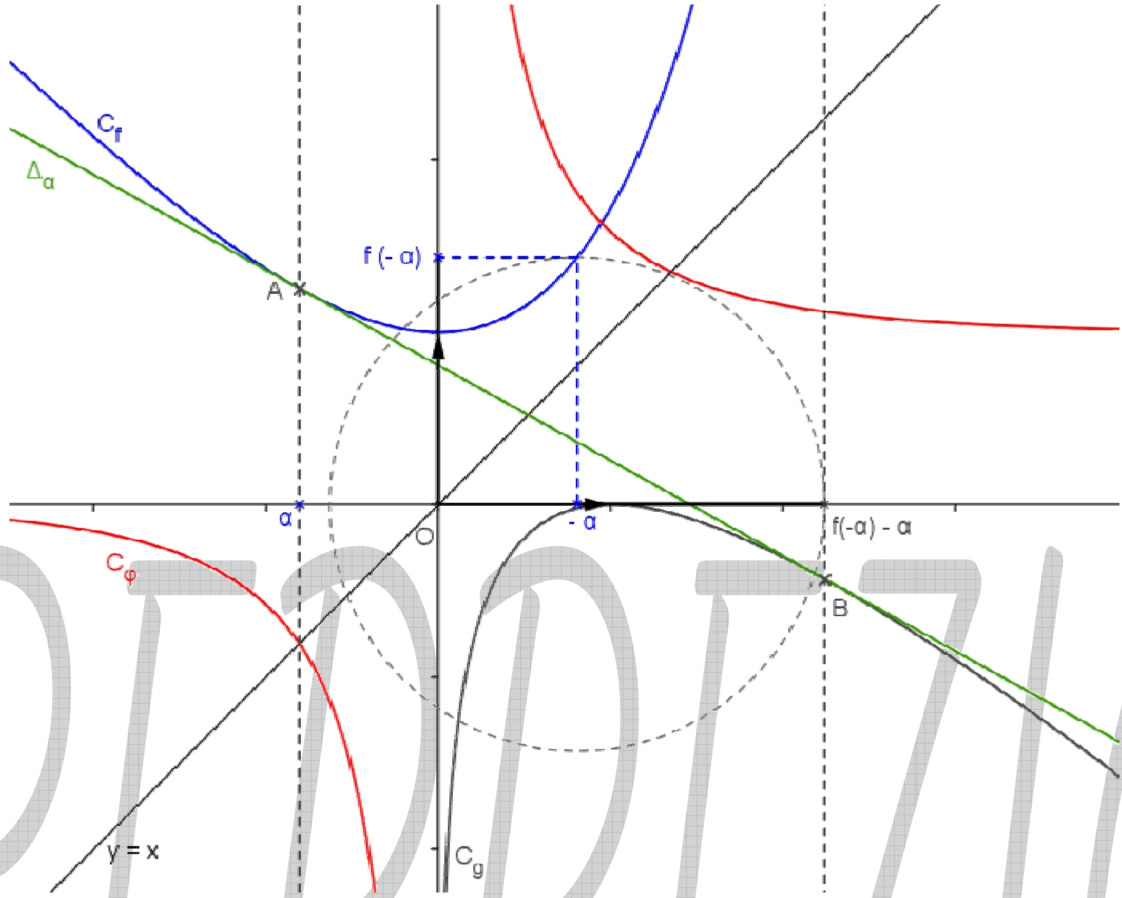
c) Comme a est la solution de l'équation $\varphi(x)=x$ donc on prend $a=\beta$ ainsi Δ_β est une tangente commune à C_f et à C_g en A_1(β, f (β)) et en B_1 (b , g (b)) comme b = $e^{-\beta}$ donc B_1 ($e^{-\beta}$; g($e^{-\beta}$))..

3) a) α est l'abscisse négative du point d'intersection de la courbe C_φ et de la droite d'équation y = x.

A(α ; f (α)) est le point de C_f d'abscisse α.

b) $f(-\alpha)-\alpha=e^{-\alpha}-(-\alpha)-\alpha=e^{-\alpha}$

Pour construire B, il suffit: de placer sur l'axe des abscisse le point d'abscisse – α, placer le point de C_f d'abscisse – α et d'ordonnée f (– α) puis construire le cercle de centre le point de l'axe des abscisse le point d'abscisse – α et de rayon f (– α) d'où l'abscisse de B, il suffit ensuite de placer le point B de la courbe C_g ayant cette abscisse. Δ_α = (AB)



C f
Δ α
f (- α)
A
α
O
- α
f(-α) - α
C φ
B
y = x
C g