REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◈◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Correction de l'épreuve de **MATHEMATIQUES** Durée : **3 H** Coefficient : **3**
Section **: Sciences Techniques**	**SESSION DE CONTROLE**

Exercice 1 : (5 points)

L'espace est munie d'un repère orthonormé direct $\left(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$.

1) (P) : $x+y-z-3=0$

On a $2+1-0-3=3-3=0$ donc $A(2\,,1\,,0)\in$ (P)

On a $2+(-1)-(-2)-3=1-1=0$ donc $B(2\,,\,-1\,,\,-2)\in$ (P)

On a $0+1-(-2)-3=3-3=0$ donc $C(0\,,1\,,\,-2)\in$ (P)

2) Soit (S) l'ensemble des points $M(x\,,y\,,z)$ de l'espace tels que : $x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0$

a) $M(x\,,y\,,z)\in(S)\Leftrightarrow x^2+y^2+z^2-4x-2y+4z+5=0$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-1)^2-1+(z+2)^2-4+5=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2-5=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-1)^2+(z+2)^2=5$$

Ainsi S est une sphère de centre $I(2\,,1\,,\,-2)$ et de rayon $R=\sqrt{5}$

b) Montrons que A, B et C appartiennent au sphère (S).

$2^2+1^2+0^2-4\times2-2\times1+4\times0+5=4+1-8-2+5=10-10=0$ donc $A(2\,,1\,,0)\in$ (S)

$2^2+(-1)^2+(-2)^2-4\times2-2\times(-1)+4\times(-2)+5=4+1+4-8+2-8+5=16-16=0$ donc $B(2\,,\,-1\,,\,-2)\in$ (S)

$0^2+1^2+(-2)^2-4\times0-2\times1+4\times(-2)+5=1+4-2-8+5=10-10=0$ donc $C(0\,,1\,,\,-2)\in$ (S)

Donc $\{A\,,B\,,C\}\in(P)\cap(S)$ et comme A, B et C sont distincts donc (P) et (S) se coupent suivant le cercle circonscrit au triangle ABC.

c) $AB=\sqrt{(2-2)^2+(-1-1)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, $AC=\sqrt{(0-2)^2+(1-1)^2+(-2-0)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

$BC=\sqrt{(0-2)^2+(1+1)^2+(-2+2)^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$ donc AB = AC = BC donc le triangle ABC est équilatéral.

3) Soit Δ la droite passant par I et perpendiculaire au plan (P).

a) le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ normal à (P) est un vecteur directeur de Δ et $I(2\,,1\,,\,-2)\in\Delta$ donc un système d'équations paramétrique de Δ est $\begin{cases}x=2+\alpha\\y=1+\alpha\\z=-2-\alpha\end{cases}$; $\alpha\in$ IR

b) $\{G(x,y,z)\}=\Delta\cap(P)\Leftrightarrow\begin{cases}x=2+\alpha\\y=1+\alpha\\z=-2-\alpha\\x+y-z-3=0\end{cases}$; $\alpha\in$ IR on remplace x, y et z dans l'équation de (P) donc

$2+\alpha+1+\alpha-(-2-\alpha)-3=0\Leftrightarrow 3\alpha+2=0\Leftrightarrow\alpha=-\dfrac{2}{3}$ ainsi $G\left(\dfrac{4}{3}\,,\,\dfrac{1}{3}\,,\,-\dfrac{4}{3}\right)$

c) $\overrightarrow{GA}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ \frac{2}{3}\\ \frac{4}{3}\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GB}\begin{pmatrix}\frac{2}{3}\\ -\frac{4}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{GC}\begin{pmatrix}-\frac{4}{3}\\ \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3}\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\vec{0}$ d'où G est le centre de gravité de ABC.

d) Le centre de cercle (C) est le projeté orthogonal de I sur (P) comme G est un point de le droite Δ perpendiculaire au plan (P) et passe par I donc G est le centre de (C).

Le rayon de (C) est $GA=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\sqrt{\frac{4}{9}+\frac{4}{9}+\frac{16}{9}}=\sqrt{\frac{24}{9}}=\frac{2\sqrt{6}}{3}$

Exercice 2 : (4 points)

1) a) Soit f la fonction sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=xe^{1-x}$

$x\geq 1\Leftrightarrow 1-x\leq 0\Leftrightarrow e^{1-x}\leq e^0\Leftrightarrow e^{1-x}\leq 1$ donc $xe^{1-x}\leq x$ ainsi $f(x)\leq x$

De même pour tout $0\leq x\leq 1\Leftrightarrow 0\leq 1-x\leq 1\Leftrightarrow e^0\leq e^{1-x}\leq e^1\Leftrightarrow 1\leq e^{1-x}\leq e$ ainsi $x\leq xe^{1-x}\leq xe$ d'où $x\leq f(x)$

b) la fonction f est dérivable sur $[0,+\infty[$; $f'(x)=e^{1-x}+x\times\left(-e^{1-x}\right)=(1-x)e^{1-x}$

c) $f'(x)=0\Leftrightarrow(1-x)e^{1-x}=0\Leftrightarrow x=1$. Le signe de $f'(x)$ est celui de $(1-x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{1-x}=\lim\limits_{x\to-\infty}xe^{-x}\times e=e\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{x}{e^x}=0$

2) Soit la suite (u_n) définie sur IN par $\begin{cases}u_0=\frac{1}{2}\\ u_{n+1}=f(u_n)\text{ pour tout }n\in IN\end{cases}$

a) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n ; $0\leq u_n\leq 1$.

Pour n = 0, $u_0=\frac{1}{2}$ et $0\leq\frac{1}{2}\leq 1$ donc $0\leq u_0\leq 1$

Supposons que pour $n\geq 0$, $0\leq u_n\leq 1$ et montrons que $0\leq u_{n+1}\leq 1$

On a $0\leq u_n\leq 1$ et comme f est strictement croissante sur $[0\ ,1]$ donc $f(0)\leq f(u_n)\leq f(1)$ d'où $0\leq u_{n+1}\leq 1$

Donc vrai pour n+1

D'où pour tout entier naturel n ; $0\leq u_n\leq 1$.

b) on a pour tout entier naturel n ; $0\leq u_n\leq 1$ donc et d'après 1) $u_n\leq f(u_n)$ d'où $u_n\leq u_{n+1}$ ainsi (u_n) est croissante.

c) la suite (u_n) est croissante et majorée par 1 donc elle converge vers une limite ℓ et $0\leq\ell\leq 1$.

comme la suite (u_n) est définie par $u_{n+1}=f(u_n)$ et f est continue sur IR donc ℓ est la solution de l'équation $x=f(x)$.

$x=f(x)\Leftrightarrow x=xe^{1-x}\Leftrightarrow x-xe^{1-x}=0\Leftrightarrow x\left(1-e^{1-x}\right)=0\Leftrightarrow x=0$ ou $e^{1-x}=1\Leftrightarrow x=0$ ou $x=1$

Comme (u_n) est croissante donc $\ell=1$

Exercice 3 : (5 points)

1) a) A : « Le candidat interrogé est admis au baccalauréat. »

M : « La moyenne annuelle du candidat interrogé est supérieur ou égale à 10 sur 20 »

BERREZIG

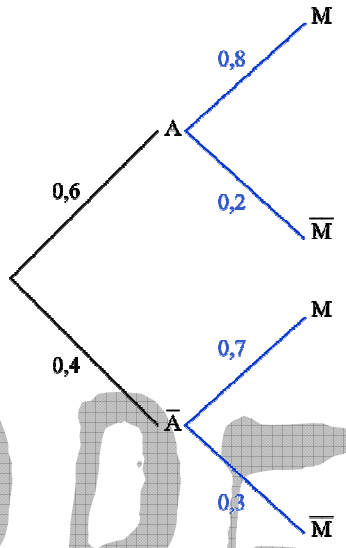
$p(\overline{A}) = \frac{40}{100} = 0,4$

$p(M/A) = \frac{80}{100} = 0,8$

$p(M/\overline{A}) = \frac{70}{100} = 0,7$

b) $p(\overline{M}/A) = 1 - p(M/A) = 1 - \frac{80}{100} = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$

2)



BERREZIG

3) a) $p(A \cap \overline{M}) = p(\overline{M}/A) \times p(A) = 0,2 \times 0,6 = 0,12$

b) $p(M) = p(A \cap M) + p(A \cap \overline{M}) = 0,6 \times 0,8 + 0,4 \times 0,7 = 0,48 + 0,28 = 0,76$

c) $p(A/M) = \frac{p(A \cap M)}{p(M)} = \frac{p(M/A) \times p(A)}{p(M)} = \frac{0,6 \times 0,8}{0,76} = \frac{0,48}{0,76} = \frac{12}{19} \approx 0,63$

4) on a $p(A \cap \overline{M}) = 0,6 \times 0,2 = 0,12$ donc 12 % des candidats sont admis et n'ayant pas une moyenne annuelle supérieure ou égale à 10. Le nombre de ces candidats $= 200 \times \frac{12}{100} = 24$

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $\begin{cases} f(x) = x^2 - 2x^2 \ln(x) & \text{si } x \in]0\ ,\ +\infty[\\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - 2x^2 \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 - 2 \lim\limits_{x \to 0^+} x^2 \ln(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

b) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{x^2 - 2x^2 \ln(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} x - 2x \ln(x) = \lim\limits_{x \to 0^+} x - 2 \lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$ donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 0$ ainsi la courbe (C) admet une demi-tangente horizontale en O.

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 - 2x^2 \ln(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} x^2 (1 - 2\ln(x)) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2 (1 - 2\ln(x))}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} x(1 - 2\ln(x)) = -\infty$ donc la courbe (C) admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.

3) a) $f(x) = x^2 - 2x^2 \ln(x)$ si $x \in]0\ ,\ +\infty[$

La fonction f est dérivable sur $]0\,,\,+\infty[$ et pour tout $x\in\,]0\,,\,+\infty[$;

$$f'(x)=2x-2\left(2x\ln(x)+x^2\times\frac{1}{x}\right)=2x-4x\ln(x)-2x=-4x\ln(x)$$

b) pour tout $x\in\,]0\,,\,+\infty[$, $f'(x)=0\Leftrightarrow -4x\ln(x)=0\Leftrightarrow \ln(x)=1\Leftrightarrow x=1$

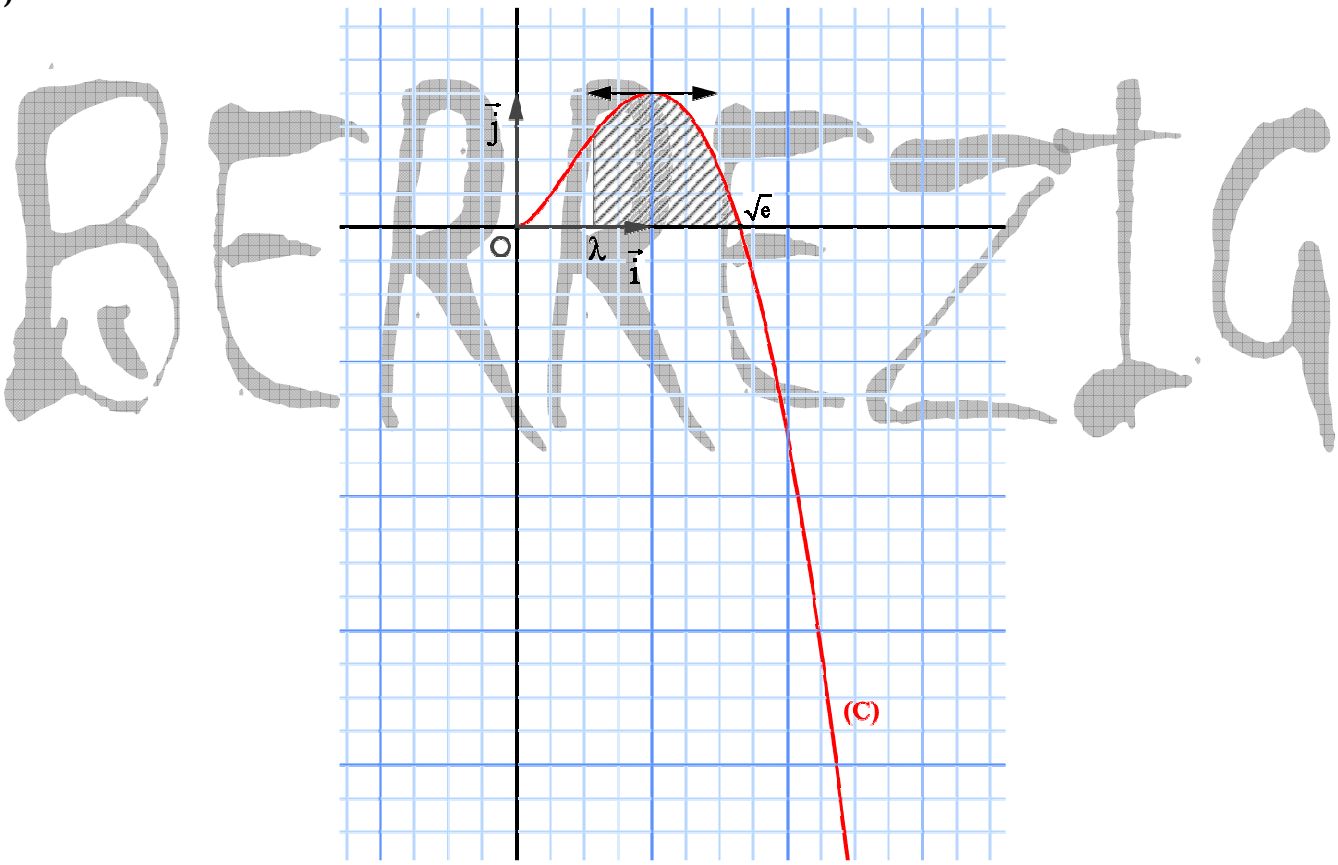
x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	1	↘	$-\infty$

4)

Pour $x>0$, $f(x)=0\Leftrightarrow x^2-2x^2\ln(x)=0\Leftrightarrow x^2(1-2\ln(x))=0\Leftrightarrow 1-2\ln(x)=0\Leftrightarrow \ln(x)=\frac{1}{2}\Leftrightarrow x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$

Et $f(0)=0$ donc Les abscisses des points d'intersections de la courbe (C) avec l'axe $(O,\vec{i})$ sont $x=0$ et $x=\sqrt{e}$

5)



6) Soit λ un réel tel que : $0<\lambda<\sqrt{e}$

a) On pose $\begin{cases} u(x)=\ln(x) \\ v'(x)=x^2 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x)=\frac{1}{x} \\ v(x)=\frac{1}{3}x^3 \end{cases}$

D'ou $\displaystyle\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2\ln(x)\,dx=\left[\frac{1}{3}x^3\ln(x)\right]_{\lambda}^{\sqrt{e}}-\int_{\lambda}^{\sqrt{e}}\frac{1}{3}x^3\times\frac{1}{x}\,dx=\frac{1}{3}\left(\sqrt{e}\right)^3\ln\left(\sqrt{e}\right)-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{1}{3}\int_{\lambda}^{\sqrt{e}}x^2\,dx$

$$=\frac{1}{6}e\sqrt{e}-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\lambda}^{\sqrt{e}}=\frac{1}{6}e\sqrt{e}-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{1}{9}e\sqrt{e}+\frac{1}{9}\lambda^3=\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)+\frac{1}{18}e\sqrt{e}$$

b) $\mathcal{A}(\lambda)=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} f(x)\,dx=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2-2x^2\ln(x)\,dx=\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2\,dx-2\int_{\lambda}^{\sqrt{e}} x^2\ln(x)\,dx$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\lambda}^{\sqrt{e}}-2\left(\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)+\frac{1}{18}e\sqrt{e}\right)=\frac{1}{3}e\sqrt{e}-\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{2}{9}\lambda^3+\frac{2}{3}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{1}{9}e\sqrt{e}$$

$$=\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{\lambda}^{\sqrt{e}}-2\left(\frac{1}{9}\lambda^3-\frac{1}{3}\lambda^3\ln(\lambda)+\frac{1}{18}e\sqrt{e}\right)=\frac{1}{3}e\sqrt{e}-\frac{1}{3}\lambda^3-\frac{2}{9}\lambda^3+\frac{2}{3}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{1}{9}e\sqrt{e}$$

$$=\frac{2}{9}e\sqrt{e}+\frac{2}{3}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{5}{9}\lambda^3\,(ua)$$

c) $\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\mathcal{A}(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\frac{2}{9}e\sqrt{e}+\frac{2}{3}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{5}{9}\lambda^3=\frac{2}{9}e\sqrt{e}+\frac{2}{3}\lim\limits_{\lambda\to 0^+}\lambda^3\ln(\lambda)-\frac{5}{9}\lambda^3=\frac{2}{9}e\sqrt{e}$

BERRZIG