REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◈◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Correction de l'épreuve de **MATHEMATIQUES**
	Durée : **3 H**
	Coefficient : **3**
Section : **Sciences Techniques**	**SESSION PRINCIPALE**

Exercice 1 : (3 points)

I) 1) **c** 2) **a** II- 1) **c** 2) **a**

Exercice 2 : (6 points)

1) a) $(P)\perp\Delta$ donc le vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ directeur de Δ est un vecteur normal à P d'où $P: 2x+y+2z+d=0$

Comme $A(4,2,2)\in(P)$ donc $2\times4+2+2\times2+d=0 \Leftrightarrow 14+d=0 \Leftrightarrow d=-14$ ainsi $(P): 2x+y+2z-14=0$

b) $B(5,-2,3)$ donc $2\times5+(-2)+2\times3-14=10-2+6-14=8-8=0$ d'où $B\in(P)$

$C(1,1,1)$ donc $2\times1+1+2\times1-14=2+1+2-14=-9\neq0$ d'où $C\notin(P)$

c) $\Delta:\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=1+\alpha\\z=1+2\alpha\end{cases};\alpha\in IR$ et $C(1,1,1)$ donc $\begin{cases}1=1+2\alpha\\1=1+\alpha\\1=1+2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=0\\\alpha=0\\\alpha=0\end{cases}$ d'où $C\in\Delta$

$\Delta:\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=1+\alpha\\z=1+2\alpha\end{cases};\alpha\in IR$ et $A(4,2,2)$ donc $\begin{cases}4=1+2\alpha\\2=1+\alpha\\2=1+2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=\frac{3}{2}\\\alpha=1\\\alpha=\frac{1}{2}\end{cases}$ ce qui est impossible d'où $A\notin\Delta$

2) a) $D(3,2,3)$ Pour montrer que D est le projeté orthogonal de C sur (P) il suffit de démontrer que $D\in\Delta$ et $D\in(P)$

$\Delta:\begin{cases}x=1+2\alpha\\y=1+\alpha\\z=1+2\alpha\end{cases};\alpha\in IR$ et $D(3,2,3)$ donc $\begin{cases}3=1+2\alpha\\2=1+\alpha\\3=1+2\alpha\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\alpha=1\\\alpha=1\end{cases}$ ainsi $D\in\Delta$

$D(3,2,3)$ donc $2\times3+2+2\times3-14=6+2+6-14=14-14=0$ d'où $D\in(P)$

Donc $\Delta\perp(P)$ en D et comme $C\in\Delta$ donc D est projeté orthogonal de C sur (P).

b) A, B et D étant des points de (P) et $C\notin(P)$ donc les points A, B , C et D ne sont pas coplanaires.

c) V : le volume du tétraèdre ABCD**.** Comme D est le projeté orthogonal de C sur (P) donc CD est la hauteur issue de C donc $V=\frac{1}{3}Aire_{ABD}\times CD$ or $Aire_{ABD}=\frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\right\|$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\-4\\1\end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AB}\wedge\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-4\\-2\\-4\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$ D'où $V=\frac{1}{6}\sqrt{16+4+16}\times\sqrt{4+1+4}=\frac{1}{6}\times6\times3=3$

3) a) $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=-1\times1+(-4)\times0+1\times1=-1+1=0$ donc $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$ ainsi A est le projeté orthogonal de D sur (AB) la distance de D à la droite (AB) est d = DA.

b) $\frac{AB\times d\times CD}{6}=\frac{AB\times AD\times CD}{6}=\frac{\sqrt{18}\times\sqrt{2}\times3}{6}=3=V$

Exercice 3 : (5 points)

1) a) $(2+2i)^2=4-4+8i=8i$

b) $z^2-2(1+i)z-6i=0$

$\Delta'=(1+i)^2+6i=2i+6i=8i=(2+2i)^2$ donc $\delta'=2+2i$

Les solutions de l'équation sont $z_1=\frac{1+i+2+2i}{1}=3+3i$ et $z_2=\frac{1+i-(2+2i)}{1}=-1-i$

2) a) $z_C-z_A=\left(1-2\sqrt{3}\right)+\left(1+2\sqrt{3}\right)i-(3+3i)=\left(-2-2\sqrt{3}\right)+\left(-2+2\sqrt{3}\right)i$

$$\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B-z_A)=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-4-4i)=-2-2i+2i\sqrt{3}-2\sqrt{3}=\left(-2-2\sqrt{3}\right)+i\left(-2-2\sqrt{3}\right)$$

D'où $z_C-z_A=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B-z_A)$

b) $\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{3}{4}}=1$

On pose $\theta=\arg\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+2k\pi$

$\cos\theta=\frac{1}{2}$ et $\sin\theta=-\frac{\sqrt{3}}{2}$ donc $\theta=-\frac{\pi}{3}$ ainsi $\arg\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}+2k\pi$

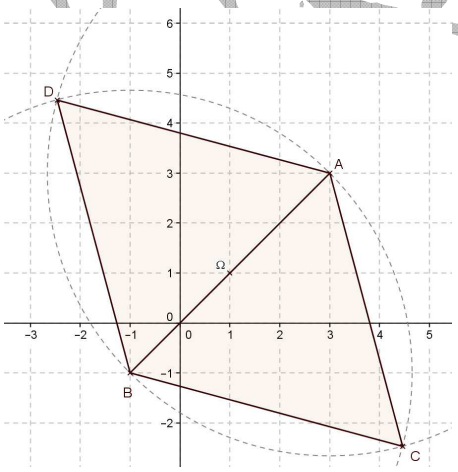
c) $z_C-z_A=\left(\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_B-z_A)\Leftrightarrow\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}=\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où $\left|\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right|=\left|\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right|\Leftrightarrow\frac{|z_C-z_A|}{|z_B-z_A|}=1$

Ainsi $\frac{AC}{AB}=1$ donc $AB=AC$ d'où ABC est isocèle en A.

$\arg\left(\frac{z_C-z_A}{z_B-z_A}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]\Leftrightarrow\left(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}\right)\equiv-\frac{\pi}{3}[2\pi]$ d'où le triangle ABC est isocèle en A et $B\hat{A}C=\frac{\pi}{3}$ donc il est équilatéral.

3) a) l'affixe du milieu de [AB] est $\frac{z_A+z_B}{2}=\frac{3+3i-1-i}{2}=1+i=z_\Omega$ d'où Ω est le milieu de [AB].

b)



c) Ω est le milieu de [AB] et D le symétrique de C par rapport à Ω

Donc [AB] et [CD] ont même milieu donc ACBD est un parallélogramme et comme ABC est équilatéral donc CA = CD d'où le parallélogramme ACBD est un losange.

d) L'aire de ACBD = 2 x aire de ABC = $2\times\frac{1}{2}AB^2\times\sin\frac{\pi}{3}=2\times\frac{1}{2}\times32\times\frac{\sqrt{3}}{2}=16\sqrt{3}$

Exercice 4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur IR par $f(x)=(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}$

1) a) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}=-\infty$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(x+2)}{x}e^{-\frac{1}{2}x}=+\infty$ D'où la courbe (C) de f admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de $-\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}xe^{-\frac{1}{2}x}+2e^{-\frac{1}{2}x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x}{\left(e^{x}\right)^{\frac{1}{2}}}+2e^{-\frac{1}{2}x}=0$ d'où la droite d'équation

y = 0 est une asymptote à la courbe (C) de f au voisinage de $+\infty$

2) $\{E\}=(C)\cap(O,\vec{i})$ donc $E(x,0)$ et $f(x)=0$

$f(x)=0\Leftrightarrow(x+2)e^{-\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow x+2=0$ donc $x=-2$ d'où $E(-2,0)$

$\{F\}=(C)\cap(O,\vec{j})$ donc $F(0,y)$ et $y=f(0)=2$ d'où $F(0,2)$

3) a) La fonction f est définie et dérivable sur IR.

Pour tout $x\in IR$, $f'(x)=e^{-\frac{1}{2}x}+(x+2)\times\left(-\frac{1}{2}\right)e^{-\frac{1}{2}x}=\left(1-\frac{1}{2}x-1\right)e^{-\frac{1}{2}x}=-\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}$

$f'(x)=0\Leftrightarrow-\frac{1}{2}xe^{-\frac{1}{2}x}=0\Leftrightarrow x=0.$ Le signe de $f'(x)$ et celui de $\left(-\frac{1}{2}x\right)$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f '(x)		+	0	−	
f(x)	$-\infty$	↗	2	↘	0

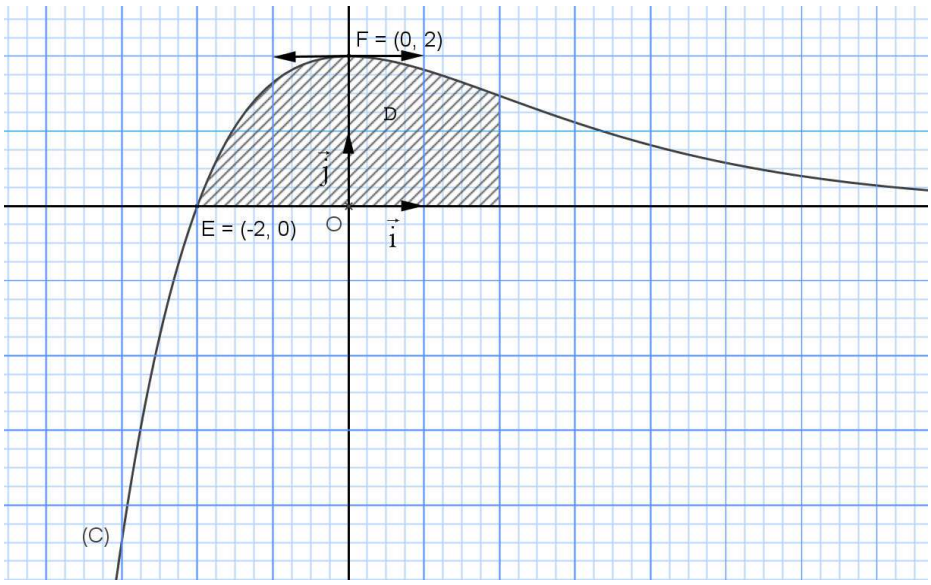
b) La fonction f ' est dérivable sur IR.

Pour tout $x\in IR$, $f''(x)=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}x}+\frac{1}{4}xe^{-\frac{1}{2}x}=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x\right)e^{-\frac{1}{2}x}$. $f''(x)=0\Leftrightarrow\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}x\right)=0\Leftrightarrow x=2$

x	$-\infty$		2		$+\infty$
f "(x)		+	0	−	

Donc le point $K(2,f(2))$ avec $f(2)=4e^{-1}=\frac{4}{e}$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

c)



4) a) $I_0 = \int_{-2}^{2} e^{-t}\ dt = \left[-e^{-t}\right]_{-2}^{2} = -e^{-2} + e^{2} = e^{2} - \frac{1}{e^{2}}$

b) $I_{n+1} = \int_{-2}^{2} (t+2)^{n+1} e^{-t}\ dt$

On pose $\begin{cases} u(x) = (t+2)^{n+1} \\ v'(x) = e^{-t} \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = (n+1)(t+2)^{n} \\ v(x) = -e^{-t} \end{cases}$

d'après le formule d'intégration par parties :

$$I_{n+1} = \int_{-2}^{2} (t+2)^{n+1} e^{-t}\ dt = \left[-(t+2)^{n+1} e^{-t}\right]_{-2}^{2} + (n+1)\int_{-2}^{2} (t+2)^{n} e^{-t}\ dt$$

$$I_{n+1} = -4^{n+1} e^{-2} + (n+1)\int_{-2}^{2} (t+2)^{n} e^{-t}\ dt = (n+1)\int_{-2}^{2} (t+2)^{n} e^{-t}\ dt - \frac{4^{n+1}}{e^{2}} = (n+1) I_n - \frac{4^{n+1}}{e^{2}}$$

c) $I_{n+1} = (n+1) I_n - \frac{4^{n+1}}{e^{2}}$ donc $I_1 = I_0 - \frac{4}{e^{2}} = e^{2} - \frac{1}{e^{2}} - \frac{4}{e^{2}} = e^{2} - \frac{5}{e^{2}}$

$$I_2 = 2I_1 - \frac{4^{2}}{e^{2}} = 2\left(e^{2} - \frac{5}{e^{2}}\right) - \frac{16}{e^{2}} = 2e^{2} - \frac{10}{e^{2}} - \frac{16}{e^{2}} = 2e^{2} - \frac{26}{e^{2}}$$

5) a) voir graphique ci-dessus.

b) $\mathcal{V} = \pi \int_{-2}^{2} (f(t))^{2}\ dt = \pi \int_{-2}^{2} (t+2)^{2} e^{-t}\ dt = \pi\ I_2 = 2\pi e^{2} - \frac{26\pi}{e^{2}}$ uv

BERREZIG