REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◆◈◆ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** **SESSION DE JUIN 2013**	Correction de l'épreuve de **MATHEMATIQUES** Durée : **3 H** Coefficient : **3**
Section : **Sciences de l'informatique**	**SESSION PRINCIPALE**

Exercice 1 : (5 points)

1) $z^2-2(2-i)z+7-4i=0$

$\Delta'=(2-i)^2-1\times(7-4i)=4-1-4i-7+4i=-4=(2i)^2$ ainsi $\delta'=2i$ donc les solutions de cette équation sont

$z_1=\dfrac{2-i+2i}{1}=2+i$ et $z_2=\dfrac{2-i-2i}{1}=2-3i$

$S_{\mathbb{C}}=\{2+i,2-3i\}$

2) Soit $P(z)=z^3-(2-3i)z^2-(3+4i)z+18-i$ où $z\in\mathbb{C}$

a) $(z+2+i)\left(z^2-2(2-i)z+7-4i\right)=z^3-2(2-i)z^2+(7-4i)z+(2+i)z^2-2(2+i)(2-i)z+(2+i)(7-4i)$

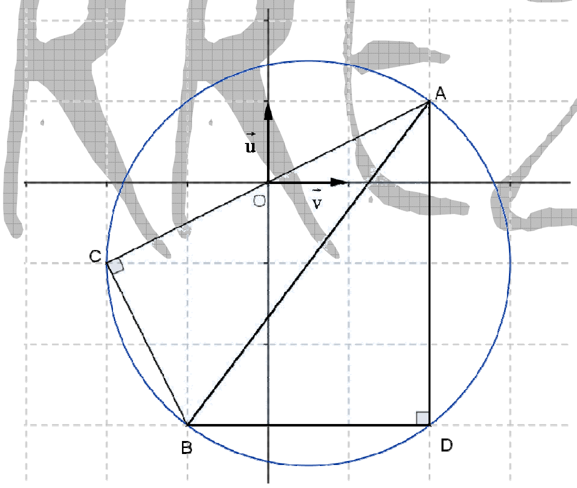
$=z^3-\left(2(2-i)-(2+i)\right)z^2-\left(2(2+i)(2-i)-(7-4i)\right)z+(2+i)(7-4i)$

$=z^3-(4-2i-2-i)z^2-(10-7+4i)z+14-8i+7i+4=z^3-(2-3i)z^2-(3+4i)z+18-i=P(z)$

b) $P(z)=0\Leftrightarrow(z+2+i)\left(z^2-2(2-i)z+7-4i\right)=0\Leftrightarrow z+2+i=0$ ou $z^2-2(2-i)z+7-4i=0$

$\Leftrightarrow z=-2-i=$ ou $z=2+i$ ou $z=2-3i$

3) a)



b) $AB=|z_B-z_A|=|-1-3i-2-i|=|-3-4i|=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5$ donc $AB^2=25$

$AC=|z_C-z_A|=|-2-i-2-i|=|-4-2i|=\sqrt{4^2+2^2}=\sqrt{20}=2\sqrt{5}$ donc $AC^2=20$

$BC=|z_C-z_B|=|-2-i+1+3i|=|-1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$ donc $BC^2=5$

Ainsi $AB^2=AC^2+BC^2$ donc ABC est rectangle en C

c) ABC est un triangle rectangle en C donc il est inscrit dans un cercle de diamètre AB

$AD=|z_D-z_A|=|2-3i-2-i|=|-4i|=4$ donc $AD^2=16$

$BD=|z_D-z_B|=|2-3i+1+3i|=|3|=3$ donc $BD^2=9$

Ainsi $AB^2=AD^2+BD^2$ donc ABD est rectangle en D donc il est inscrit dans le même cercle de diamètre AB
D'où les points A,B , C et D sont un même cercle de centre I : le milieu de [AB] d'affixe

$z_I=\dfrac{z_A+z_B}{2}=\dfrac{2+i-1-3i}{2}=\dfrac{1}{2}-i$ et de rayon $\dfrac{AB}{2}=\dfrac{5}{2}$

Exercice 2 : (4 points)

1) a) $p(F)=\frac{52}{100}=\frac{13}{25}$, $p(I)=\frac{20}{100}=\frac{1}{5}$ et $p(F\cap I)=\frac{12}{100}=\frac{3}{25}$

b) I / F est l'événement :l'élève choisit suit la spécialité informatique sachant que c'est une fille.

$$p(I/F)=\frac{p(I\cap F)}{p(F)}=\frac{\frac{3}{25}}{\frac{13}{25}}=\frac{3}{13}$$

2) a) $p(I/\overline{F})=\frac{p(I\cap\overline{F})}{p(\overline{F})}$ or $p(I)=p(I\cap F)+p(I\cap\overline{F})\Leftrightarrow p(I\cap\overline{F})=p(I)-p(I\cap F)$ d'où $p(I\cap\overline{F})=\frac{1}{5}-\frac{3}{25}=\frac{2}{25}$

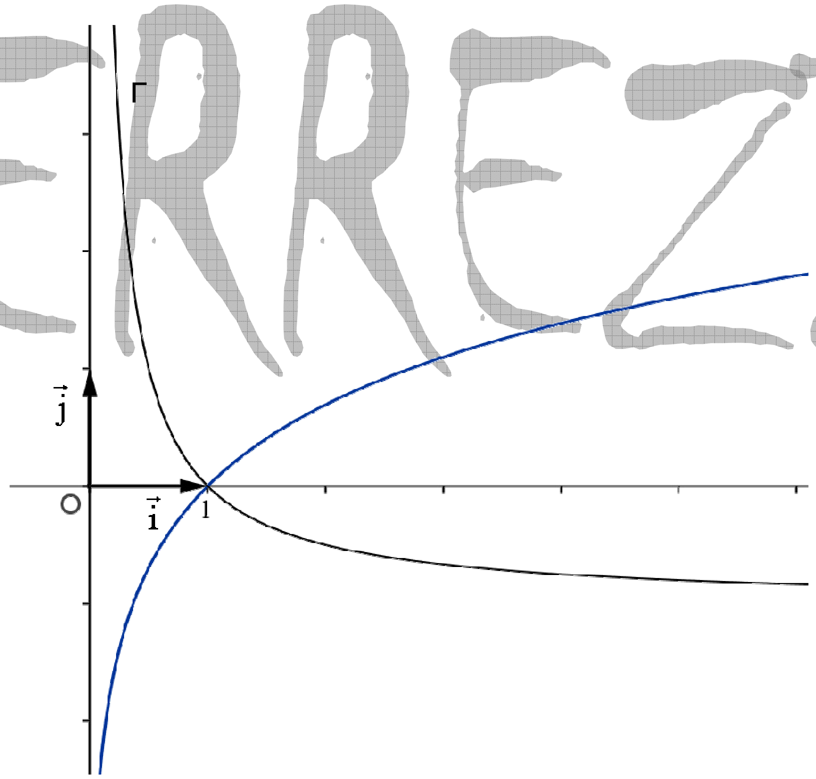
et $p(\overline{F})=1-p(F)=\frac{12}{25}$ D'où $p(I/\overline{F})=\frac{p(I\cap\overline{F})}{p(\overline{F})}=\frac{\frac{2}{25}}{\frac{12}{25}}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$

b) $\overline{F}\cap\overline{I}$ est l'événement : l'élève choisit est garçon qui ne suit pas la spécialité informatique.

$p(\overline{F}\cap\overline{I})=p(\overline{I}/\overline{F})\times p(\overline{F})$ or $p(\overline{I}/\overline{F})=1-p(I/\overline{F})=1-\frac{1}{6}=\frac{5}{6}$ d'où $p(\overline{F}\cap\overline{I})=\frac{5}{6}\times\frac{12}{25}=\frac{2}{5}$

Exercice 3 : (6 points)

1)



a) La courbe (C) représente la fonction ln et la courbe Γ est celle de la fonction u en effet : $\ln x<0$ pour tout $0<x<1$ donc sa courbe est au dessous de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]0\,,\,1[$ ..

b)

x	0		1		$+\infty$
Position de (C) et Γ		(C) est au dessous de Γ		(C) est au dessus de Γ	
Signe de $\ln(x)-u(x)$		$\ln(x)-u(x)<0$	0	$\ln(x)-u(x)>0$	

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\ln x$

a) $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}(x-1)\ln x=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}(x-1)\ln x=+\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{x-1}{x}\right)\ln x = +\infty$ D'où la courbe C_f admet une branche infinie parabolique de direction celle de $(O,\vec{j})$ au voisinage de $+\infty$

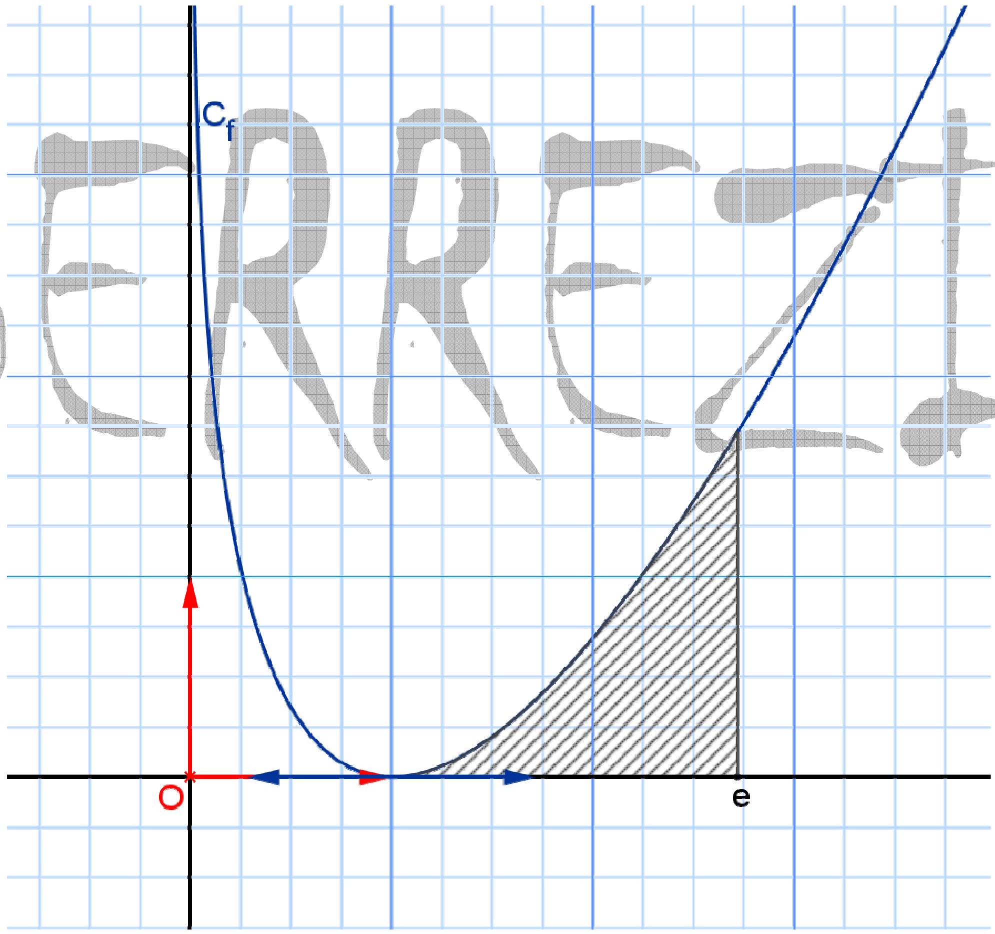
c) La fonction f est dérivable sur $]0,+\infty[$

Pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \ln x + (x-1)\times\frac{1}{x} = \ln x + 1 - \frac{1}{x} = \ln x - \left(\frac{1}{x} - 1\right) = \ln x - u(x)$

d) $f'(x) = \ln x - u(x)$ d'après 1) b)

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

3)



4) $\mathscr{A} = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e (x-1)\ln x\,dx$

On pose On pose $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x-1 \end{cases}$ donc $\begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{1}{2}x^2 - x \end{cases}$

Donc $\mathscr{A}=\left[\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)\ln x\right]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}\left(\frac{1}{2}x^2-x\right)dx=\frac{1}{2}e^2-e-\int_1^e\left(\frac{1}{2}x-1\right)dx$

$=\frac{1}{2}e^2-e-\left[\frac{1}{4}x^2-x\right]_1^e=\frac{1}{2}e^2-e-\left(\frac{1}{4}e^2-e+\frac{3}{4}\right)=\frac{1}{4}e^2-\frac{3}{4}=\frac{e^2-3}{4}$ ua

Exercice 4 : (6 points)

1) $(E):2x-3y=1$

a) si (x ; y) est une solution de (E) alors $2x-3y=1$ donc il existe deux entier u = 2 et v = - 3 tel que $xu+yv=1$ d'après l'identité de Bezout x et y sont premiers entre eux.

b) $2\times(-1)-3\times(-1)=-2+3=1$ donc (-1 ; -1) est une solution de (E)

c): $(E):2x-3y=1$ Et on a aussi : $2\times(-1)-3\times(-1)=1$.

Par soustraction on obtient : $2(x+1)-3(y+1)=0\Leftrightarrow(E'):2(x+1)=3(y+1)$

Donc 3 divise $2(x+1)$ et comme $3\wedge 2=1$ donc 3 divise $x+1$ ainsi alors il existe $k\in\mathbb{Z}$ tel que $x+1=3k$

D'où $x=3k-1$ on remplace x dans l'équation (E') on obtient

$2(3k-1+1)=3(y+1)\Leftrightarrow 2\times 3k=3(y+1)\Leftrightarrow y+1=2k$ d'où $y=2k-1$

Réciproquement : on remplace $x=3k-1$ et $y=2k-1$ dans l'équation

$(E):2(3k-1)-3(2k-1)=6k-2-6k+3=1$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}}=\{(3k-1\ ;\ 2k-1),k\in\mathbb{Z}\}$

2) a) $\det(A)=\begin{vmatrix}m-2 & n-1\\ 3 & 2\end{vmatrix}=(m-2)\times 2-3\times(n-1)=2m-4-3n+3=2m-3n-1$

b) A n'est pas inversible donc $2m-3n-1=0\Leftrightarrow 2m-3n=1$ donc les couples (m , n) sont les solutions de l'équations (E) d'où $(m\ ;\ n)=(3k-1\ ;\ 2k-1)$ avec $k\in\mathbb{Z}$

c) $13\equiv 1[3]$ donc $13^{2013}\equiv 1[3]$ ainsi $2011\times 13^{2013}\equiv 2011[3]$ comme $2011\equiv 1[3]$ d'où $2011\times 13^{2013}\equiv 1[3]$

$11\equiv(-1)[3]$ donc $11^{2012}\equiv 1[3]$ ainsi $2015\times 13^{2013}\equiv 2015[3]$ comme $2015\equiv 2[3]$ d'où $2015\times 11^{2012}\equiv 2[3]$

d) $2011\times 13^{2013}\equiv 1[3]\Leftrightarrow 2011\times 13^{2013}\equiv -2[3]$ donc $2011\times 13^{2013}=3k-2=m-2$ avec $k\in\mathbb{Z}$

$2015\times 11^{2012}\equiv 2[3]\Leftrightarrow 2015\times 11^{2012}\equiv -1[3]$ donc $2015\times 11^{2012}=3k'-1=n-1$ avec $k'\in\mathbb{Z}$

Ainsi la matrice B s'écrit $B=\begin{pmatrix}m-2 & n-\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ avec $m=3k$ et $n=3k'$

B n'est inversible que si les couples (m , n) sont les solutions de l'équations (E) d'après 1) a) m et n sont donc premier entre eux ce qui est impossible car $m=3(k+1)$ et $n=3(k'+1)$ donc ils sont divisible par 3 d'où B est inversible.