UNE CORRECTION DU SUJET DE BAC SECTION MATHS SESSION PRINCIPALE JUIN 2013

PROFESSEUR ALI BEN MESSAOUD
LYCEE MARSA ERRIADH
LE VENDREDI 7 juin 2012

Exercice 1

1. **(A_1) VRAI**

$2013 = 61 \times 33$

si $33\,n \equiv 0 \pmod{2013}$ il existe un entier k tel que $33\,n = 2013\,k$ donc $33\,n = 33 \times 61\,k$ donc $n = 61\,k$ soit $n \equiv 0 \pmod{61}$

(A_2) VRAI

$33\,x + 11\,y = 2013 \Leftrightarrow 3\,x + y = 61$ donc le couple $(x\,;\,61 - 3\,x)$ est solution pour tout x entier.

2. **(A_3) VRAI**

Soit $g(x) = \displaystyle\int_1^x \frac{e^t}{1+t^2}\,dt$.

La fonction $f : x \longrightarrow \dfrac{e^x}{1+x^2}$ est définie continue sur R donc g est la primitive nulle en 1 de f donc g est dérivable sur R.

$F(x) = g(\ln x)$

La fonction $x \longrightarrow \ln x$ est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$ et g est dérivable sur R donc F est dérivable sur $]\,0\,;+\infty\,[$.

(A_4) FAUX

$F'(x) = g'(\ln x) \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{e^{\ln x}}{1+(\ln x)^2} \times \dfrac{1}{x} = \dfrac{x}{1+(\ln x)^2} \times \dfrac{1}{x}$

$F'(x) = \dfrac{1}{1+(\ln x)^2}$

Exercice 2

A. 1. $f : \begin{cases} O \mapsto O \\ B \mapsto A \end{cases}$ donc l'angle de f a pour mesure $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OA})$ soit $-\dfrac{\pi}{3}$ et le rapport de la similitude est $\dfrac{OA}{OB}$.

Le triangle OAB est rectangle en B et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$ donc $\cos\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{OB}{OA}$ donc $\dfrac{OA}{OB} = 2$

La similitude a pour rapport 2.

2. $f : \begin{cases} O \mapsto O \\ B \mapsto A \\ A \mapsto C \end{cases}$

Une similitude directe conserve les angles orientés donc transforme le triangle OAB rectangle en B en le triangle OAC rectangle en f(B) = A de plus le rapport de la similitude est 2 et $\begin{cases} B \mapsto A \\ A \mapsto C \end{cases}$ donc AC = 2 AB.

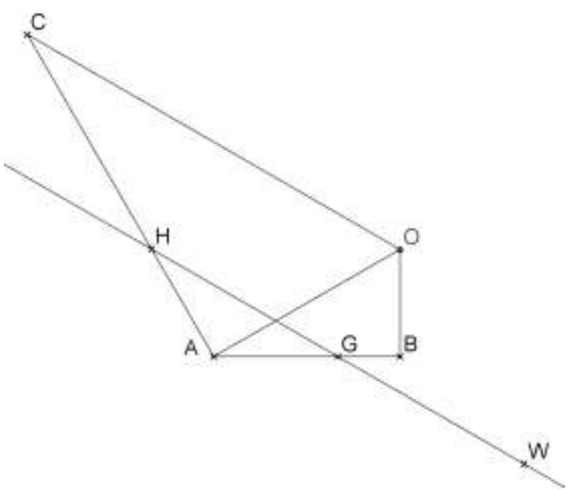
B. 1. $g : \begin{cases} \Omega \mapsto \Omega \\ B \mapsto A \\ A \mapsto C \end{cases}$

<u>1ER méthode</u>

$g = h(\Omega, 2) o S_D$

$gog = h(\Omega, 2^2) = h(\Omega, 4)$

gog(B)=C d ou $\overrightarrow{\Omega C} = 4\,\overrightarrow{\Omega B}$



<u>2em méthode</u>

Le rapport de la similitude g est $\dfrac{AC}{BA}$ soit 2

$\Omega A = 2\,\Omega B$ et $\Omega C = 2\,\Omega A$ donc $\Omega C = 4\,\Omega B$

g est une similitude indirecte donc $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv -(\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C})\quad [2\pi]$

donc $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv 0 \quad [2\pi]$ soit $(\overrightarrow{\Omega B}, \overrightarrow{\Omega C}) \equiv 0 \quad [2\pi]$

Les vecteurs $\overrightarrow{\Omega B}$ et $\overrightarrow{\Omega C}$ sont colinéaires et de même sens et ΩC = 4 ΩB donc $\overrightarrow{\Omega C} = 4\,\overrightarrow{\Omega B}$.

$\overrightarrow{\Omega C} = 4\,\overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{\Omega B} + \overrightarrow{BC} = 4\,\overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{\Omega B}$

$\overrightarrow{B\Omega} = -\frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC}$

2. *a.* G est le barycentre de {(A ; 1) (B ; 2)} donc pour tout point M du plan : $3\,\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MA} + 2\,\overrightarrow{MB}$ donc en choisissant M = B : $3\,\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA}$ soit $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BA}$

Une similitude conserve les barycentres donc si G est le barycentre de {(A ; 1) (B ; 2)} alors *g*(G) est le barycentre de {(*g*(A) ; 1) (*g*(B) ; 2)} donc H est le barycentre de {(C ; 1) (A ; 2)}

H est le barycentre de {(C ; 1) (A ; 2)}donc pour tout point M du plan : $3\,\overrightarrow{MH} = \overrightarrow{MC} + 2\,\overrightarrow{MA}$ donc en choisissant M = A : $3\,\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC}$ soit $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$.

2. *b.* $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{AC}$ donc $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \frac{1}{3}\,\overrightarrow{BC}$ or $\overrightarrow{\Omega C} = 4\,\overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{BC} = 3\,\overrightarrow{\Omega B}$ donc $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AH} = \overrightarrow{\Omega B}$.

$\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega G} + \overrightarrow{GB}$ donc $2\,\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega G}$

G est le barycentre de {(A ; 1) (B ; 2)} donc $2\,\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{AG} = \vec{0}$ donc $\overrightarrow{GH} = \overrightarrow{\Omega G}$ donc G est le milieu de [ΩH].

2. *c.* *g* est une similitude indirecte de rapport 2 donc *g* est la composée d'une homothétie *h* de centre Ω de rapport 2 et d'une symétrie orthogonale *s* d'axe Δ axe de la similitude passant par Ω.

$g = h \circ s = s \circ h$

G est le milieu de [ΩH] donc *h*(G) = H

g(G) = H donc *s* o *h* (G) = H soit *s*(H) = H, H est invariant par *s* donc H appartient à Δ donc Δ est la droite (ΩH) ou encore la droite (GH).

g est la similitude indirecte de centre Ω de rapport 2 d'axe (GH).

Exercice 3

1. *a.* I(1 ; 1 ; 0) J(0 ; 1 ; 1) et K(1 ; 0 ; – 1) donc $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{IK}\begin{pmatrix}0\\-1\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}$

1. *b.* $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$ est un vecteur non nul donc les points I, J et K ne sont pas alignés, ils déterminent un plan de vecteur normal $\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$ donc d'équation $(x-1) - (y-1) + z = 0$ soit $x - y + z = 0$

2. $\overrightarrow{SI}\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{SI} \cdot (\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}) = -2 - 1 = -3$ donc le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{6}\,|\,\overrightarrow{SI} \cdot (\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK})\,| = \frac{1}{6} \times 3 = \frac{1}{2}$.

3. $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ}) \wedge (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IK})$ $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{IK} + \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \vec{0} + \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{IK} - \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{IJ} + \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MI} \wedge (\overrightarrow{IK} - \overrightarrow{IJ}) + \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$

$\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{JK} + \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$

M ∈ Δ donc $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires donc $\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK} = \overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}$

le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{6}\,|\,\overrightarrow{SJ} \cdot (\overrightarrow{MJ} \wedge \overrightarrow{MK})\,| = \frac{1}{6}\,|\,\overrightarrow{SJ} \cdot (\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK})\,|$

$\overrightarrow{SJ}\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{SJ} \cdot (\overrightarrow{IJ} \wedge \overrightarrow{IK}) = -1 - 2 = -3$ donc le volume du tétraèdre SIJK est égal à $\frac{1}{2}$.

4. *a.* $\overrightarrow{SI'} = 2\overrightarrow{SI}$ donc I' a pour coordonnées (1 ; 3 ; – 1)

Une homothétie transforme un plan en un plan parallèle donc le plan (IJK) est transformé par *h* en un plan parallèle passant par I' donc P' a pour équation $x - y + z = d$,

I' $\in$ P' donc $1 - 3 - 1 = d$ donc $d = -3$

P' a pour équation $x - y + z = -3$

4. *b.* Δ est la droite parallèle en I à (JK) donc Δ est une droite du plan P donc M est transformé par *h* en un point de P'.

La droite (SM) passe par le centre de l'homothétie donc est globalement invariante par *h* donc *h*(M) est un point de (SM) et de P' donc *h*(M) est le point d'intersection de la droite (SM) et du plan P' donc *h*(M) = M'. de même J' = *h*(J) et K' = *h*(K).

Le tétraèdre SMJK est donc transformé par *h* en le tétraèdre SM'J'K', *h* a pour rapport 2 donc le volume de ce tétraèdre est $2^3\, V_{SMJK}$ soit $2^3 \times \frac{1}{2} = 4$.

M est le milieu de [SM], J celui de [SJ'] et K celui de [SK'] donc le volume du solide MJKM'J'K' est égal à $V_{SM'J'K'} - V_{SMJK}$ donc $V = 4 - \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$.

Exercice 4

1. *a.* $\text{Aff}(\overrightarrow{EM}) = 1 + e^{i\theta} - 1 = e^{i\theta}$

$\text{Aff}(\overrightarrow{FN}) = i\,(1 + e^{i\theta}) - i = i\,e^{i\theta}$

1. *b.* $EM = |\,e^{i\theta}\,| = 1$ donc M appartient au cercle C_1 de centre E(1) de rayon 1.

$FN = |\,i\,e^{i\theta}\,| = |\,i\,|\,|\,e^{i\theta}\,| = 1$ donc N appartient au cercle C_2 de centre F(i) de rayon 1.

1. *c.* $\arg \dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = \arg(i)$ donc $\arg \dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc $(\overrightarrow{EM}, \overrightarrow{FN}) \equiv \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$ donc les droites (EM) et (FN) sont perpendiculaires.

2. $\text{Aff}(\overrightarrow{EP}) = (1 - i)\sin\theta\, e^{i\theta} - 1$

$\text{Aff}(\overrightarrow{EM}) = e^{i\theta}$ donc $\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = [\,(1 - i)\sin\theta\, e^{i\theta} - 1\,]\,e^{-i\theta}$

$\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = (1 - i)\sin\theta - e^{-i\theta} = (1 - i)\sin\theta - (\cos\theta - i\sin\theta)$

$\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta.$

$\text{Aff}(\overrightarrow{FP}) = (1 - i)\sin\theta\, e^{i\theta} - i$

$\text{Aff}(\overrightarrow{FN}) = i\,e^{i\theta}$ donc $\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})} = \dfrac{1}{i}[\,(1 - i)\sin\theta\, e^{i\theta} - i\,]\,e^{-i\theta}$

$\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})} = \dfrac{1}{i}[\,(1 - i)\sin\theta - i\,e^{-i\theta}\,]$

$\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})} = \dfrac{1}{i}[\,(1 - i)\sin\theta - i\,(\cos\theta - i\sin\theta)\,]$

$\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})} = \dfrac{1}{i}[\,-i\sin\theta - i\cos\theta\,] = -\sin\theta - \cos\theta.$

$\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{EP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{EM})} = \sin\theta - \cos\theta$ donc $\overrightarrow{EP} = (\sin\theta - \cos\theta)\,\overrightarrow{EM}$ donc P $\in$ (EM)

$\dfrac{\text{Aff}(\overrightarrow{FP})}{\text{Aff}(\overrightarrow{FN})} = -\sin\theta - \cos\theta$ donc $\overrightarrow{FP} = (-\sin\theta - \cos\theta)\,\overrightarrow{FN}$ donc P $\in$ (FN)

P est le point d'intersection des droites (EM) et (FN).

Exercice 5

Partie I

1. *a.* $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} = \dfrac{1}{1 - e^{-x}}$.

$\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$

$\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$

La courbe C_φ admet deux asymptotes : la droite d'équation $y = 0$ en $-\infty$ et la droite d'équation $y = 1$ en $+\infty$.

1. *b.* $\lim\limits_{x \to 0^-} e^x = 1^-$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} e^x - 1 = 0^-$ donc $\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to 0^+} e^x = 1^+$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} e^x - 1 = 0^+$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = +\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est asymptote à C_φ.

1. *c.* $\varphi(x) = \dfrac{e^x}{e^x - 1} = 1 + \dfrac{1}{e^x - 1}$

φ est une fonction définie dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

$\varphi'(x) = -\dfrac{e^x}{(e^x - 1)^2}$, la fonction exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$ donc $\varphi'(x) < 0$ sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction φ est strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

2. Soit $\Phi(x) = \varphi(x) - x$

Φ est une fonction définie dérivable sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

$\Phi'(x) = \varphi'(x) - 1$, la fonction φ' est strictement négative sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$ donc $\Phi'(x) < 0$ sur $]-\infty ; 0[$ et sur $]0 ; +\infty[$.

La fonction Φ est définie continue strictement décroissante sur $]-\infty ; 0[$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \varphi(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \varphi(x) = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to -\infty} \Phi(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} \Phi(x) = -\infty$ donc l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une seule solution α sur $]\infty ; 0[$.

La fonction Φ est définie continue strictement décroissante sur $]0 ; +\infty[$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x) = 1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \varphi(x) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \Phi(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \Phi(x) = +\infty$ donc l'équation $\Phi(x) = 0$ admet une seule solution β sur $]0 ; +\infty[$

Partie II

1. *a.* $f'(x) = e^x - 1$ donc Δ_a a pour équation $y = (e^a - 1)(x - a) + e^a - a$

soit $y = (e^a - 1)x + e^a(1 - a)$

$g'(x) = -1 + \dfrac{1}{x}$ donc D_b a pour équation $y = \left(-1 + \dfrac{1}{b}\right)(x - b) + 1 - b + \ln b$

soit $y = \dfrac{1 - b}{b} x + \ln b$

1. *b.* Δ_a et D_b sont parallèles si et seulement si leurs coefficients directeurs sont égaux soit $\left(-1 + \dfrac{1}{b}\right) = e^a - 1 \Leftrightarrow \dfrac{1}{b} = e^a$

$\Leftrightarrow b = e^{-a}$.

2. *a.* $b = e^{-a}$, donc D_b a pour équation $y = (e^a - 1)\; x + \ln e^{-a}$ soit $y = (e^a - 1)x - a$

Δ_a et D_b sont parallèles donc seront confondues si et seulement si leurs ordonnées à l'origine sont égales soit $-a = e^a(1 - a)$ et $a \neq 0$

$-a = e^a(1 - a)$ et $a \neq 0 \Leftrightarrow a(e^a - 1) = e^a$ et $a \neq 0 \Leftrightarrow a = \dfrac{e^a}{e^a - 1}$ et $a \neq 0$.

2. *b.* *c.* L'énoncé est imprécis : il n'y a aucune condition sur a pour imposer $a < 0$ donc il faut traiter les questions b et c simultanément.

$a = \dfrac{e^a}{e^a - 1}$ et $a \neq 0 \Leftrightarrow a$ est solution de $\varphi(x) = x$.

L'équation $\varphi(x) = x$ admet deux solutions α et β ($\alpha < 0$ et $\beta > 0$) d'après la première partie donc les tangentes Δ_a et D_b sont confondues si et seulement si $a = \alpha$ ou $a = \beta$

si $a = \alpha$ alors $b = e^{-\alpha}$ donc Δ_a est tangente à C_f et à C_g en $A(\alpha, f(\alpha))$ et $B(e^{-\alpha} ; g(e^{-\alpha}))$.

si $a = \beta$ alors $b = e^{-\beta}$ donc Δ_a est tangente à C_f et à C_g en $A(\beta, f(\beta))$ et $B(e^{-\beta} ; g(e^{-\beta}))$.

3. *a.* α est l'abscisse négative du point d'intersection de la courbe C_φ et de la droite d'équation $y = x$.

$A(\alpha ; f(\alpha)$ est le point de C_f d'abscisse α.

b. $f(-\alpha) - \alpha = e^{-\alpha} - (-\alpha) - \alpha = e^{-\alpha}$

Le point de contact de D_α et C_g est le point d'abscisse $b = e^{-\alpha}$ donc B a pour coordonnées $B(e^{-\alpha} ; g(e^{-\alpha}))$.

Pour construire B, il suffit donc :

de placer le point de l'axe des abscisse ayant pour abscisse $-\alpha$, de chercher le point E de C_f d'abscisse $-\alpha$ et le point F symétrique de A par rapport à l'axe des ordonnées, F a pour coordonnées $(-\alpha ; \alpha)$ le segment [EF] a pour longueur $f(-\alpha) - \alpha$ d'où l'abscisse de B, il suffit ensuite de placer le point B de la courbe C_g ayant cette abscisse.

$\Delta_\alpha = (AB)$