CORRECTION DU SUJET SECTION INFORMATIQUE BAC JUIN 2013
PROFESSEUR ALI BEN MESSAOUD

Exercice 1

1. $\Delta' = (2 - i)^2 - (7 - 4i) = 4 - 4i - 1 - 7 + 4i = -4$

$z_1 = 2 - i - 2i = 2 - 3i$ ou $z_2 = 2 - i + 2i = 2 + i$

2. *a.* $(z + 2 + i)(z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i) = z^3 - 2(2 - i)z^2 + (7 - 4i)z + (2 + i)z^2 - 2(2 + i)(2 - i)z + (2 + i)(7 - 4i)$

$= z^3 - (4 - 2i - (2 + i))z^2 + (7 - 4i - 10)z + 14 - 8i + 7i + 4$

$= z^3 - (2 - 3i)z^2 + (-3 - 4i)z + 18 - i = P(z)$

2. *b.* $P(z) = 0 \Leftrightarrow (z + 2 + i) = 0$ ou $(z^2 - 2(2 - i)z + 7 - 4i) = 0 \Leftrightarrow z = -2 - i$ ou $z = 2 - 3i$ ou $z = 2 + i$

3. *b.* $AB^2 = |2 + i - (-1 - 3i)|^2 = |3 + 4i|^2 = 25$

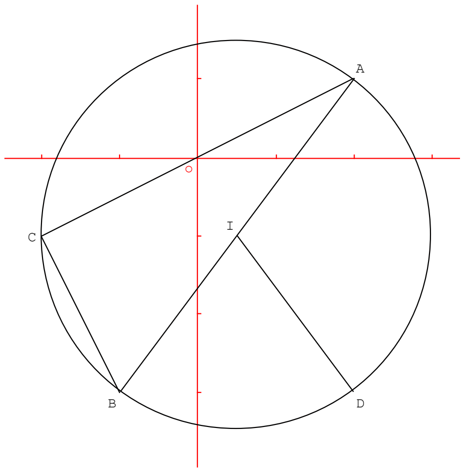
$BC^2 = |-2 - i - (-1 - 3i)|^2 = |-1 + 2i|^2 = 5$

$AC^2 = |2 + i - (-2 - i)|^2 = |4 + 2i|^2 = 20$

$AB^2 = BC^2 + AC^2$ donc le triangle ABC est rectangle en C, il est inscrit dans le cercle de diamètre [AB] donc de centre $I\left(\frac{1}{2} - i\right)$ de rayon $\frac{5}{2}$.

3. *c.* $ID^2 = \left|\frac{1}{2} - i - (2 - 3i)\right|^2 = \left|-\frac{3}{2} + 2i\right|^2 = \frac{9}{4} + 4 = \frac{25}{4}$ donc $ID = \frac{5}{2}$

D appartient au cercle de diamètre [AB].



Exercice 2

1. *a.* $P(F) = 0,52 = \frac{13}{25}$; $P(I) = \frac{20}{100} = \frac{1}{5}$; $P(F \cap I) = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$

1. *b.* $P(I / F) = \frac{P(F \cap I)}{P(F)} = \frac{0,12}{0,52} = \frac{3}{13}$

2. *a.* $P(I) = P(F \cap I) + P(I / \overline{F}) \times F(\overline{F})$

$\frac{1}{5} = \frac{3}{25} + P(I / \overline{F}) \times \frac{48}{100}$ donc $P(I / \overline{F}) \times \frac{12}{25} = \frac{1}{5} - \frac{3}{25} = \frac{2}{25}$.

$P(I / \overline{F}) = \frac{2}{12} = \frac{1}{6}$.

2. *b.* $P(I \cap \overline{F}) = P(I / \overline{F}) \times F(\overline{F}) = \frac{1}{6} \times \frac{12}{25} = \frac{2}{25}$

$P(\overline{I} \cap \overline{F}) + P(I \cap \overline{F}) = P(\overline{F})$ donc $P(\overline{I} \cap \overline{F}) = \frac{48}{100} - \frac{2}{25} = \frac{40}{100} = \frac{2}{5}$

On pouvait répondre à toutes ces questions à l'aide d'un tableau :

	F	$\overline{F}$	Total
I	12	8	20
$\overline{I}$	40	40	80
Total	52	48	100

Exercice 3

1. *a*. La fonction logarithme népérien est croissante sur] 0 ; + ∞ [donc sa représentation graphique est (C), la courbe (Γ) est celle de la fonction *u*.

b. Sur] 0 ; 1 [(Γ) est au dessus de (C)
si $x = 1$, les deux courbes se coupent
Sur] 1 ; + ∞ [(Γ) est en dessous de (C)

x	0		1		$+\infty$
$\ln x - u(x)$	‖	$-$	0	$+$	

2. *a*. $\lim\limits_{x \to 0^+} x - 1 = -1$ et $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

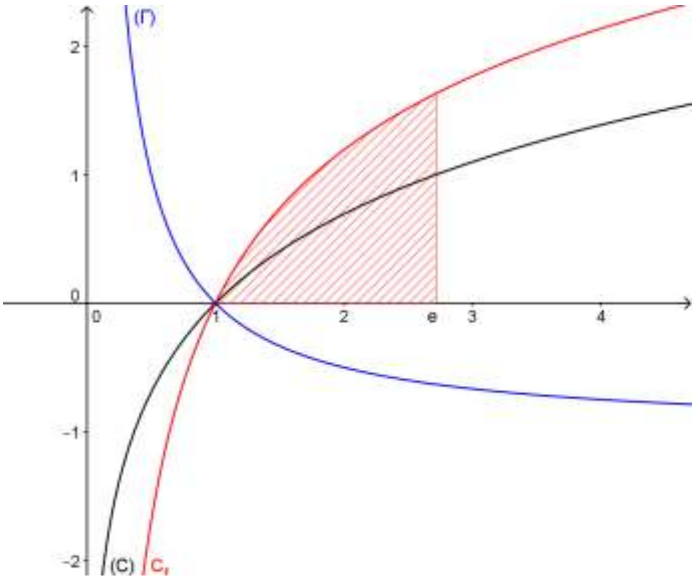
2. *b*. $\dfrac{f(x)}{x} = \left(1 - \dfrac{1}{x}\right) \ln x$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 1 - \dfrac{1}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$

La courbe C_f admet une branche parabolique de direction (O*y*) en + ∞.

2. *c*. f est dérivable sur] 0 ; + ∞ [et $f'(x) = 1 \ln x + \dfrac{x-1}{x} = \ln x + 1 - \dfrac{1}{x} = \ln x - u(x)$

x	0		1		$+\infty$
$f'(x) = \ln x - u(x)$	‖	$-$	0	$+$	
f	‖ $+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$



4. $\begin{cases} u'(x) = x - 1 & u(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - x \\ v(x) = \ln x & v'(x) = \dfrac{1}{x} \end{cases}$

$A = \left[\left(\dfrac{1}{2}x^2 - x\right)\ln x\right]_1^e - \displaystyle\int_1^e \left(\dfrac{1}{2}x - 1\right) dx$

$A = \dfrac{1}{2}e^2 - e - \left[\dfrac{1}{4}x^2 - x\right]_1^e$

$A = \dfrac{1}{2}e^2 - e - \left(\dfrac{1}{4}e^2 - e - \left(\dfrac{1}{4} - 1\right)\right)$

$A = \dfrac{1}{4}e^2 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{e^2 - 3}{4}$ (*u. a.*)

Exercice 4

1. *a*. Si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) alors $2\,x - 3\,y = 1$.

Soit $d = \text{PGCD}(x\ ;\ y)$, d divise x et d divise y donc d divise $2\,x - 3\,y$ donc d divise 1, $d > 0$ donc $d = 1$ donc x et y sont premiers entre eux.

1. *b*. $2 \times (-1) - 3 \times (-1) = -2 + 3 = 1$ donc $(-1\ ;\ -1)$ est solution de (E).

1. *c*. $\begin{cases} 2\,x - 3\,y = 1 \\ 2 \times (-1) - 3 \times (-1) = 1 \end{cases}$ donc par différence membre à membre :

$2\,(x + 1) - 3\,(y + 1) = 0$ soit $2\,(x + 1) = 3\,(y + 1)$

$x + 1 \in \mathbb{Z}$ donc 2 divise $3\,(y + 1)$, 2 et 3 sont premiers ente eux donc donc il existe un entier relatif k tel que $y + 1 = 2\,k$

$2\,(x + 1) = 3\,(y + 1)$ et $y + 1 = 2\,k$ donc $x + 1 = 3\,k$

Si $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) alors $x = 3\,k - 1$ et $y = 2\,k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Vérification :

$2\,x - 3\,y = 2\,(3\,k - 1) - 3\,(2\,k - 1) = -2 + 3 = -1$

donc $(x\ ;\ y)$ est solution de (E) si et seulement si $x = 3\,k - 1$ et $y = 2\,k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$).

2. *a*. dét A $= 2\,(m - 2) - 3\,(n - 1) = 2\,m - 3\,n - 1$

2. *b*. A n'est pas inversible si et seulement si dét A = 0 soit $2\,m - 3\,n = 1$

A n'est pas inversible si et seulement si $m = 3\,k - 1$ et $n = 2\,k - 1$ ($k \in \mathbb{Z}$) d'après la question précédente.

2. *c*. $2011 = 3 \times 670 + 1$ donc $2011 \equiv 1\ [3]$

$13 = 3 \times 4 + 1$ donc $13 \equiv 1\ [3]$ donc $13^{2013} \equiv 1\ [3]$

$2011 \equiv 1\ [3]$ et $13^{2013} \equiv 1\ [3]$ donc $2011 \times 13^{2013} \equiv 1\ [3]$

$2015 = 3 \times 671 + 2$ donc $2015 \equiv 2\ [3]$

$11 = 3 \times 3 + 2$ donc $11 \equiv 2\ [3]$ donc $11^2 \equiv 4\ [3]$ donc $11^2 \equiv 1\ [3]$

$(11^2)^{1006} \equiv 1\ [3]$ donc $11^{2012} \equiv 2\ [3]$

$2015 \equiv 2\ [3]$ et $11^{2012} \equiv 1\ [3]$ donc $2015 \times 11^{2012} \equiv 1\ [3]$

d. Soit $m - 2 = 2011 \times 13^{2013}$ donc $m = 2011 \times 13^{2013} + 2$

et $n - 1 = 2015 \times 11^{2012}$ donc $n = 2015 \times 11^{2012} + 1$

$2\,m - 3\,n - 1 = 2 \times 2011 \times 13^{2013} + 4 - 3 \times 2015 \times 11^{2012} - 3 - 1$

$2\,m - 3\,n - 1 = 2 \times 2011 \times 13^{2013} - 3 \times 2015 \times 11^{2012}$

$2\,m - 3\,n - 1 \equiv 2 \times 1 - 3 \times 1\ [3]$

$2\,m - 3\,n - 1 \equiv -1\ [3]$ donc $2\,m - 3\,n - 1 \neq 0$

La matrice B est inversible.