UNE CORRECTION DU SUJET DE LA SECTION SCIENCE EXPERIMENTALE SESSION PRINCIPALE JUIN 2013
2013-06-08
PROFESSEUR ALI BEN MESSAOUD LYCEE MARSA ERRIADH

Exercice 1

1. FAUX

$\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD}\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD} = 2\,\overrightarrow{AE}$

On pouvait aussi considérer que puisque $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$ sont orthogonaux et tous deux de norme $\sqrt{2}$, leur produit vectoriel est colinéaire à $\overrightarrow{AE}$, mais de norme 2 donc $\overrightarrow{AC}\wedge\overrightarrow{BD} \neq \overrightarrow{AE}$.

2. VRAI

Le plan (ACG) contient les points I et J donc $(\overrightarrow{IA}\wedge\overrightarrow{IG}).\overrightarrow{IJ} = 0$.

3. FAUX

AC = $\sqrt{2}$ donc la sphère de diamètre [AC] a pour rayon $\frac{\sqrt{2}}{2}$ or IJ = 1 donc IJ > $\frac{\sqrt{2}}{2}$, et (IJ) est perpendiculaire au plan d'équation $z = 1$ (plan (EFG)) donc ce plan n'est pas tangent à la sphère de diamètre [AC].

Exercice 2

$f'(x) = 3x^2 + 6$ donc $f'(x) > 0$

1. Graphiquement : la courbe C_f coupe l'axe des abscisses en un seul point d'abscisse comprise entre – 1 et 0 donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

OU

La fonction f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet une solution unique α dans $\mathbb{R}$.

2. $f(-0{,}4) \approx -0{,}464$ et $f(-0{,}3) \approx 0{,}173$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc $-0{,}4 < \alpha < -0{,}3$

II 1. *a*. $a_1^{\,3} = \sqrt[3]{2}^{\,3} = 2$ donc a_1 est solution de $z^3 = 2$

Les racines cubiques de l'unité sont 1 ; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ donc les racines cubiques de 2 sont a_1, $a_1\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_1 e^{i\frac{-2\pi}{3}}$

soit les solutions de $z^3 = 2$ sont : $a_1 = \sqrt[3]{2}$, $a_2 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $a_3 = \sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{-2\pi}{3}}$.

1. *b*. $b_1^{\,3} = \left(-\sqrt[3]{4}\right)^3 = -4$ donc b_1 est solution de $z^3 = -4$

Les racines cubiques de l'unité sont 1 ; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ donc les racines cubiques de – 4 sont b_1, $b_1\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $b_1 e^{i\frac{-2\pi}{3}}$ soit $-\sqrt[3]{4}$, $-\sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $-\sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{-2\pi}{3}}$.

$-1 = e^{i\pi}$ donc $-\sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}\,e^{i\pi}e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{5\pi}{3}}$ soit encore $\sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{-\pi}{3}}$

$-\sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}\,e^{i\pi}e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$.

Les solutions de $z^3 = -4$ sont $b_1 = -\sqrt[3]{4}$; $b_2 = \sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $b_3 = \sqrt[3]{4}\,e^{i\frac{-\pi}{3}}$.

c. $a_1 b_1 = -\sqrt[3]{4}\times\sqrt[3]{2} = -\sqrt[3]{8} = -2$

$a_2 b_2 = \sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{\pi}{3}}\,e^{i\frac{2\pi}{3}} = \sqrt[3]{8}\,e^{i\pi} = -2$

$a_3 b_3 = \sqrt[3]{4}\,\sqrt[3]{2}\,e^{i\frac{-\pi}{3}}\,e^{i\frac{-2\pi}{3}} = \sqrt[3]{8}\,e^{-i\pi} = -2$

2. *a*. $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$ donc $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b)$.

2. *b*. $(a+b)^3 = -2 - 6(a+b)$ donc $(a+b)^3 + 6(a+b) + 2 = 0$ $a+b$ est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$
Soit a une solution de $z^3 = 2$ et b une solution de $z^3 = -4$ alors $a^3 + b^3 = 2 - 4 = -2$

Si $a = a_1$ et $b = b_1$ alors $a_1^3 + b_1^3 = -2$ et $a_1 b_1 = -2$ donc $a_1 + b_1$ est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$
Si $a = a_2$ et $b = b_2$ alors $a_2^3 + b_2^3 = -2$ et $a_2 b_2 = -2$ donc $a_2 + b_2$ est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$
Si $a = a_3$ et $b = b_3$ alors $a_3^3 + b_3^3 = -2$ et $a_3 b_3 = -2$ donc $a_3 + b_3$ est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$

$a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$

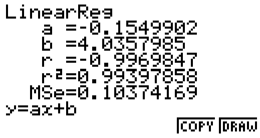
$a_2 + b_2 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{2\pi}{3}} + \sqrt[3]{4}\ e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $a_3 + b_3 = \sqrt[3]{2}\ e^{i\frac{-2\pi}{3}} + \sqrt[3]{4}\ e^{i\frac{-\pi}{3}}$ donc $a_3 + b_3$ est le conjugué de $a_2 + b_2$

$a_1 + b_1$; $a_2 + b_2$; $a_3 + b_3$ sont deux à deux distinctes or une équation de degré n admet exactement n solutions complexes donc $z^3 + 6z + 2 = 0$ admet pour solutions $a_1 + b_1$; $a_2 + b_2$; $a_3 + b_3$.

4. α est solution de $z^3 + 6z + 2 = 0$ et α est réel donc $\alpha = a_1 + b_1 = \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{4}$.

Exercice 3

1. Apparemment le nombre de mouche après avoir augmenté se stabilise autour de 1034 mouches.
2. $r = -0{,}994$
$M = -0{,}155\ T + 4{,}036$



3. $M = \ln\left(\frac{1035}{N} - 1\right)$ donc $e^M = \frac{1035}{N} - 1$ donc $\frac{1035}{N} = 1 + e^M$ donc $N = \frac{1035}{1 + e^M}$.

or $M = -0{,}155\ T + 4{,}036$ donc $N = \frac{1035}{1 + e^{-0{,}155\,T + 4{,}036}}$

$N = \frac{1035}{1 + e^{4{,}036} \times e^{-0{,}155\,T}} = \frac{1035}{1 + e^{4{,}036} \times e^{-0{,}155\,T}}$ de la forme $\frac{1035}{1 + \alpha\, e^{-\beta T}}$ avec $\alpha = e^{4{,}036}$ et $\beta = 0{,}155$

4. La fonction $f : x \to \frac{1035}{1 + e^{4{,}036} \times e^{-0{,}155\,x}}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 1035$ donc la conjecture est vérifiée.

Exercice 4

1.

2. *a*. $f(5) = \ln\left(5 + \sqrt{25 - 9}\right) = \ln(5 + 4) = \ln 9 = 2 \ln 3$

2. *c*. MP = 5 – 3 = 2 ; PN = 2 ln 3 – ln 3 = ln 3
Le rectangle MPNQ a pour aire MP × PN donc 2 ln 3

Le triangle MNP a pour aire $\frac{1}{2}$ MP × PN = $\frac{1}{2} \times 2 \times \ln 3 = \ln 3$

L'aire demandée est comprise entre l'aire du triangle MNP et l'aire du rectangle MPNQ donc $\ln 3 \le A \le 2 \ln 3$

3. *a*. $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x^2 - 9} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} x + \sqrt{x^2 - 9} = +\infty$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

3. *b*. $f(3) = \ln 3$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

La fonction f est définie continue strictement croissante sur [3 ; + ∞ [, donc f est une bijection de [3 ; + ∞ [sur f([3 ; + ∞ [) soit [ln 3 ; + ∞[.

4. C_g est la symétrique de C_f par rapport à la droite d'équation $y = x$.

5. *b*. E' est l'aire du rectangle ABCD privée de l'aire limitée par l'axe des abscisses, la droite d'équation $x = \ln 3$ et la droite d'équation $x = 2 \ln 3$ et la courbe de g.
Le point de f d'ordonnée 2 ln 3 a pour abscisse 5 donc le point C de la courbe de g d'abscisse ln 5 a pour ordonnée 5, donc :

AB = 2 ln 3 – ln 3 = ln 3 et AD = 5 donc $A' = 5 \ln 3 - \int_{\ln 3}^{2 \ln 3} g(x)\,dx$.

6. *a*. f est une bijection de [3 ; + ∞ [sur [ln 3 ; + ∞[donc $g = f^{-1}$ est une bijection de [ln 3 ; + ∞[sur [3 ; + ∞ [
Soit $x \in$ [ln 3 ; + ∞ [,

$g(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \ln\left(y + \sqrt{y^2 - 9}\right) = x \Leftrightarrow y + \sqrt{y^2 - 9} = e^x$

$\sqrt{y^2 - 9} = e^x - y \Leftrightarrow y^2 - 9 = (e^x - y)^2 \Leftrightarrow -9 = e^{2x} - 2\,e^x y \Leftrightarrow 2\,e^x y = 9 + e^{2x} \Leftrightarrow 2y = 9\,e^{-x} + e^x \Leftrightarrow y = \frac{e^y + 9\,e^{-y}}{2}$

donc g est la fonction définie sur [ln 3 ; + ∞ [par $g(x) = \frac{e^x + 9\,e^{-x}}{2}$.

6. *b*. Une primitive de g est la fonction G définie sur [ln 3 ; + ∞ [par $G(x) = \frac{1}{2}(e^{x} - 9\,e^{-x})$

$\int_{\ln 3}^{2 \ln 3} g(x)\,d\,x = G(2 \ln 3) - G(\ln 3)$

$e^{2 \ln 3} = 9$ et $e^{\ln 3} = 3$ donc $G(2 \ln 3) = \frac{1}{2}(9 - 1) = 4$ et $G(\ln 3) = \frac{1}{2}(3 - 3) = 0$ donc $\int_{\ln 3}^{2 \ln 3} g(x)\,d\,x = 4$

$A' = 5 \ln 3 - \int_{\ln 3}^{2 \ln 3} g(x)\,d\,x = 5 \ln 3 - 4$

A et A' sont les aires de deux domaines plans symétriques par rapport la droite d'équation $y = x$ donc $A = A' = 5 \ln 3 - 4$