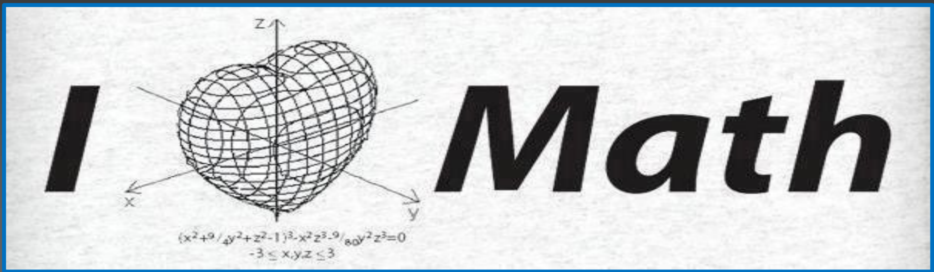
| | | | |
|---|---|---|---|
| LYCEE FARHAT HACHED.KEF. | BAC BLANC | | SMAALI.MONDHER. |
| 10 MAI 2013. | 4° SC.EXP. | 3H. | |

# CORRECTION.

- LE SUJET COMPORTE 4 EXERCICES : (5+5+6+4)points.

EXERCICE 1 : STATISTIQUES (AJUSTEMENTAFFINE ET EXPONENTIEL).
EXERCICE 2 : PROBABILITES (V.A. CONTINUES ET LOI BINOMIALE).
EXERCICE 3 : EQUATIONS DIFFERENTIELLES ET INTEGRALES.
EXERCICE 4 : ETUDE DE FONCTIONS ET SUITES.

- LES DEUX PAGES DES ANNEXES (1-2-3-4) SONT A RENDRE AVEC LA COPIE EN INSCRIVANT (NOM-PRENOM-CLASSE ET NUMERO).
- LA QUALITE DE LA REDACTION ET DE LA PRESENTATION, LA CLARTE ET LA PRECISION DES RAISONNEMENTS ENTRERONT POUR UNE PART IMPORTANTE DANS L'APPRECIATION DES COPIES.
- LES CALCULATRICES SONT AUTORISEES.
- INTERDICTION STRICTE D'ETULISER LES PORTABLES.

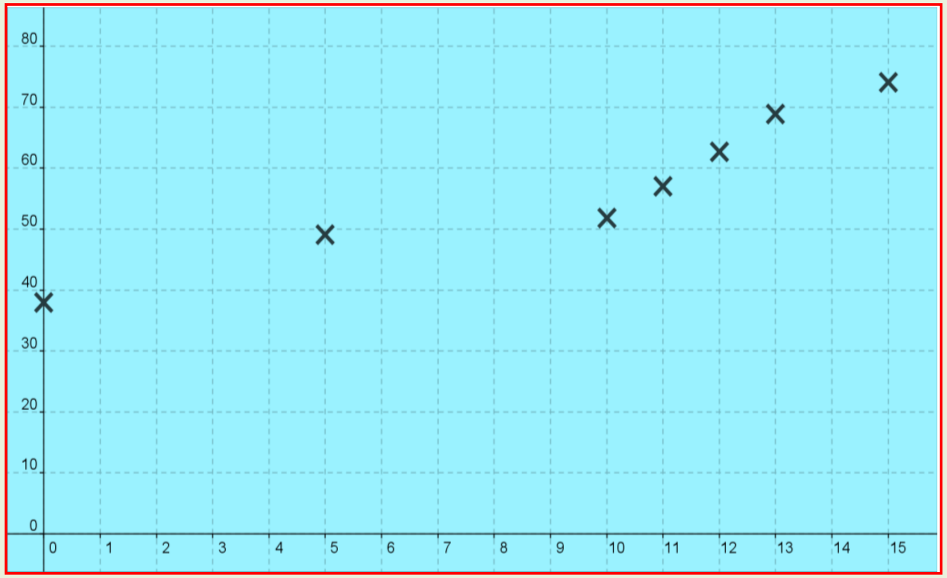



# EXERCICE n°1.

Le tableau ci-contre, donne la consommation médicale (en milliard de dinars) de la population d'un pays.

**1-**

**a.** Représenter le nuage des points de la série statistiques doubles (X, Y).




**b.** Déterminer le coefficient de corrélation r.

$r = \frac{cov(X,Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = 0{,}95$

Alors, un ajustement affine est-il bien justifié ?

$r > \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow$ Un ajustement affine est justifié.

**c.** Donner une équation de Δ la droite de régression de Y en X, obtenue par la méthode des moindres carrées ; sous la forme Δ : Y=aX+b.
(a et b sont arrondis au centième).

$$a = \frac{\mathrm{cov}(X,Y)}{v(X)} = 2{,}25 \quad et \quad b = \overline{Y} - a\overline{X} = 36{,}17$$

$$\text{alors } \Delta : Y = 2{,}25\,X + 36{,}17$$

**d.** En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle.
Donner une estimation de la consommation médicale en milliard de dinars pour l'année 2013 (arrondi au centième)

L'an 2013 correspond à $X_i=23$

Alors $Y_i=2{,}25.23+36{,}17=84{,}92$ milliard de dinars.

**2-** A partir de l'an 2000, on modélise la consommation médicale par un ajustement exponentiel.
On pose Z=Ln(Y).

**a.** Compléter le tableau :

| Année. | 1990 | 1995 | 2000 | 2001 | 2002 | 2003 | 2005 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Rang de l'année : $X_i$ | 0 | 5 | 10 | 11 | 12 | 13 | 15 |
| Consommation médicale : $Y_i$ | 38 | 49,1 | 51,8 | 57 | 62,7 | 68,9 | 74,1 |
| $Z_i = Ln(Y_i)$ | | | 3,95 | 4,04 | 4,14 | 4,23 | 4,31 |

**b.** Déterminer une équation de la droite d'ajustement affine D de Z en X (D : Z=αX+β) α et β sont arrondis au centième.

$$\alpha = \frac{\operatorname{cov}(Z,X)}{\sigma_Z\sigma_X} = 0{,}07 \text{ et } \beta = \overline{Z} - \alpha\,\overline{X} = 3{,}24$$

$\rightarrow$ D : Z=0,07X+3,24

**c.** Déduire que Y s'écrit sous la forme $Y=A.B^X$
Où A et B sont deux réels arrondis au centième à déterminer.

Z=0,07X+3,24 $\Leftrightarrow$ LnY=0,07X+3,24

$\Leftrightarrow Y = e^{0{,}07X+3{,}24} = e^{3{,}24}.e^{0{,}07X}$

$\Leftrightarrow Y = (25{,}53).(1{,}07)^X$ .

**d.** Estimer alors, l'année où la consommation médicale est de cent milliard de dinars.

Pour Y=100, $X = \frac{\mathrm{LnY}-\beta}{\alpha} = 19.50$ soit X=20 (le rang d'une année est un entier) qui correspond à l'an 2010.

## EXERCICE n°2.

**A.** Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre λ.

La fonction densité associée à X : $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$, x>0.

**1-** Interpréter sur le graphique la probabilité : $p(X \leq 1)$.

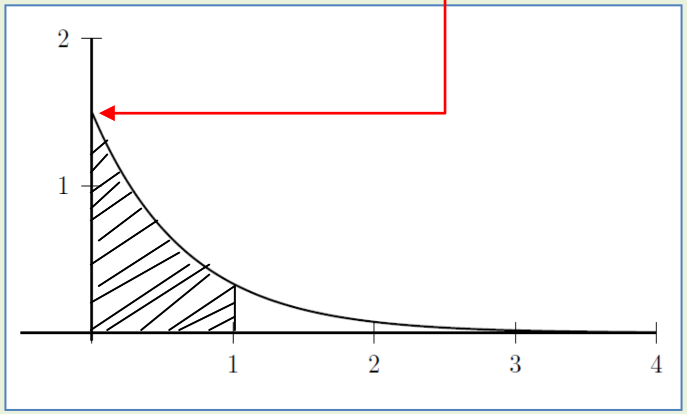
$p(X \leq 1) = \int_0^1 f(x)dx$ : C'est l'aire de la partie du plan limitée par $C_f$, l'axe (ox) et les droites verticales d'éq°x=0 et x=1.

**2-** Indiquer sur le graphique où se lit directement le paramètre λ.

f(0)=λ :

λ se lit directement sur la courbe (intersection de C avec (oy).)

Donc λ=3/2=1,5.



**B.** On pose λ=1,5

**1-** Calculer la probabilité : $p(X \leq 1)$

$$p(X \leq 1) = \int_0^1 \mathrm{f(x)dx} = \int_0^1 1{,}5.e^{-1{,}5x}\,\mathrm{dx} = 1 - e^{-1{,}5}$$

$$= 1 - e^{-\frac{3}{2}} = 1 - \sqrt{e^{-3}} \quad valeur\ exacte.$$

$$\cong 0{,}777 \qquad v.a\ \text{à}10^{-3} prés\ par\ excés.$$

**2-** Calculer la probabilité : $p(X \geq 2)$.

$$p(X \geq 2) = e^{-1{,}5\,.\,2} \cong 0{,}050$$

**3-** Déduire que : $p(1 \leq X \leq 2) = 0{,}173$ à$10^{-3}$ prés.

$$p(1 \leq X \leq 2) = 1 - p(X \leq 1) - p(X \geq 2)$$
$$= 1 - 0{,}777 - 0{,}050 = 0{,}173$$

**C.** Une machine fabrique des cylindres.

On mesure l'écart, en dixième de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage.

On suppose que cet écart suit la loi exponentielle précédente.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80% des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

**1-** On prélève au hasard un cylindre dans la production.

**a.** Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 (à $10^{-3}$ prés).

$$p = p(X \leq 1) + 0{,}8.p(1 \leq X \leq 2)$$
$$= 0{,}777 + 0{,}8\,.\,0{,}173 \qquad = 0{,}915.$$

**b.** Sachant que le cylindre est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ? $p' = \dfrac{0{,}8\,.\;p(1 \leq X \leq 2)}{p} = 0{,}151$

**2-** On prélève de manière indépendante et identique dix cylindres de la production.→ On a une loi binomiale de paramètre 10 et p.

**a.** Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?

$p_1 = (p)^{10} = (0{,}915)^{10}$ =0,411

**b.** Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?

Le complémentaire de a. $\rightarrow\ p_2 = 1 - p_1 = 0{,}589$

# EXERCICE n°3.

Soit les équations différentielles suivantes,

(E) : (2x+1) **Y**-x **Y'**=$6x^2$ et (E') : **Y'**=2**Y**-6

On considère une fonction f définie et dérivable sur]0, +∞[,

Et on pose $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ pour x>0 : $g'(x) = \frac{x.f'(x)-f(x)}{x^2}$

**1-**

**a.** Montrer que : f est solution de (E) ssi g est solution de (E').

f solut° de (E) ⇔ (2x+1) f(x) –x f'(x) = $6x^2$

⇔ 2x f(x) +f(x) –x f'(x) = 6 $x^2$

$\Leftrightarrow \frac{2f(x)}{x} + \frac{f(x)-x\,f(x)}{x^2} = 6 \Leftrightarrow 2\,g(x) - g'(x) = 6$

⇔ g'(x) = 2g(x) + 6

⇔ g est solution de (E').

**b.** Résoudre (E') : de type y'=ay+b

Les solutions de (E') sont les fonctions :

g(x) = k.$e^{2x}$ + 3 ; k∈IR.

**c.** Déduire toutes les solutions de (E).

f(x)=x.g(x)=kx.$e^{2x}$ + 3x, k∈IR.

**d.** Existe-t-il une fonction $f_0$ solution de (E) dont la courbe passe par le point A (Ln$\sqrt{3}$ , 0) ? si oui la préciser.

f(Ln√3)=0 ⇔ k.Ln(√3).$(\sqrt{3})^2$+3.Ln(√3)=0 ⇔ k=-1

Donc $f_0$ existe, et $f_0(x) = -xe^{2x}+3x$.

**2-** Soit h(x)=x (3-$e^{2x}$) ; x≥ 0 , dont la représentation graphique C dans un repère orthogonal $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ est donnée en **annexe .(unité graphique : 2cmX1cm)**

**a.** Déterminer les coordonnées des points d'intersection de C avec l'axe des abscisses : h(x)=0 ⇔ x=0 ou $e^{2x}$=3 ⇔ x=0 ou x=Ln(√3)

→ (C) coupe $(O,\vec{\imath})$ en : O(0,0) et A (Ln(√3) ,0).

**b.** Déterminer l'équation de la tangente T à C en O.

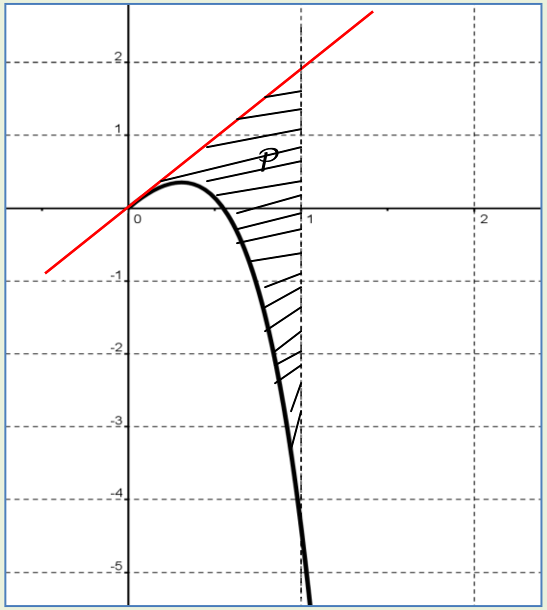
$h'(x) = 3-(2x+1)\, e^{2x}$.

$h(0)=0$ et $h'(0)=2 \to T : y=2x$.

**c.** étudier la position relative de C et T ; puis tracer T sur le graphique.

$h(x)-2x = x\,(1-e^{2x}) < 0$ car $x>0$ et $e^{2x}>1$

$\to$ C est au-dessous de T.




**d.** Calculer l'intégrale suivante : $K = \int_0^1 xe^{2x}\,dx$ .

Intégrons par parties : $\begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = e^{2x} \end{cases} \to \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \frac{1}{2}e^{2x} \end{cases}$

$$K = \left[\frac{x}{2}e^{2x}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}e^{2x}\,dx = \frac{e}{2} - \left[\frac{1}{4}e^{2x}\right]_0^1$$

$$= \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{e^2+1}{4}.$$

**e.** Hachurer sur la partie $\mathcal{P}$ du plan limitée par C, $(O, \vec{\imath})$ et les droites d'équation x=0 et x=1. Et calculer son aire en $cm^2$.

$$\text{Aire} = \int_0^1 2x - h(x)\,dx = \int_0^1 x(e^{2x} - 1)\,dx$$

$$= \int_0^1 xe^{2x}\,dx - \int_0^1 x\,dx = K - \frac{1}{2} = \frac{e^2-1}{4}\,u.a.$$

$$= \frac{e^2-1}{4}.2\,cm^2 = \frac{e^2-1}{2}\,cm^2.$$

# EXERCICE n°4.

On considère la fonction f définie sur IR par : $f(x) = Ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + \frac{x}{3}$.

Soit C sa courbe.

**1-**

**a.** Calculer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.

♠ $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} Ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + \frac{x}{3} = +\infty$

Car : $\lim_{x\to+\infty}\frac{1+e^x}{e^x} = 1$ et $\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{3} = +\infty$.

♠ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} Ln\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) + \frac{x}{3}$ $\quad F.I.$

$$= \lim_{x\to-\infty} \mathrm{Ln}(1+e^x) - \mathrm{Ln}(e^x) + \frac{x}{3}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \mathrm{Ln}(1+e^x) - \frac{2x}{3} = +\infty$$

Car $\lim_{x\to-\infty} 1+e^x = 1$ et $\lim_{x\to-\infty} -\frac{2x}{3} = +\infty$

**b.** Vérifier que la droite D : $y = \frac{x}{3}$ est une asymptote à C en $+\infty$,

$$f(x) - \frac{x}{3} = \mathrm{Ln}\left(\frac{1+e^x}{e^x}\right) = \mathrm{Ln}(1+e^{-x})$$

$\to \lim_{x\to+\infty} f(x) - \frac{x}{3} = 0$

Alors la droite D est une asymptote à C en $+\infty$.

Et étudier leur position relative.

$f(x)-\frac{x}{3}=\mathrm{Ln}(1+e^{-x})>0 \rightarrow$ C est au dessus de D.

**2-** Dresser le tableau de variation de f.

f est dérivable sur IR,

et $f'(x)=[\mathrm{Ln}(1+e^{x})]'-\left[\frac{2x}{3}\right]'=\frac{e^{x}}{1+e^{x}}-\frac{2}{3}=\frac{e^{x}-2}{3(e^{x}+1)}$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow e^{x}=2 \Leftrightarrow x=\mathrm{Ln}2$ et $f'(x)>0 \Leftrightarrow x>\mathrm{Ln}2$.

$f(\mathrm{Ln}2)=Ln\left(\frac{3}{2}\right)+\frac{Ln2}{3}=Ln\left(\frac{3}{\sqrt[3]{4}}\right)$. Alors le T.V. de f est :

| x | $-\infty$ | | Ln2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| f'(x) | | - | 0 | + | |
| f(x) | $+\infty$ | $\searrow$ | f(Ln2) | $\nearrow$ | $+\infty$ |

**3-** On donne la suite définie sur IN par : $V_n=\int_0^n Ln(1+e^{-x})dx$.

**a.** Montrer que $\frac{1}{1+t}<1$ pour t>0,

$t>0 \Leftrightarrow 1+t>1 \Leftrightarrow \frac{1}{1+t}<1$.

Et déduire que $Ln(1+t)<t$ pour t>0.

Pour x>0, $\frac{1}{1+x}<1 \Leftrightarrow \int_0^t \frac{1}{1+x}dx<\int_0^t 1\,dx \Leftrightarrow [\mathrm{Ln}(1+x)]_0^t<[x]_0^t$

$\Leftrightarrow$ Ln (1+t) <t pour t>0.

**b.** Montrer que $V_n<1$ pour tout $n\in$IN.

Pour $t=e^{-x}>0$ on aura : $\mathrm{Ln}(1+e^{-x})<e^{-x}$

$$\int_0^n Ln(1+e^{-x})\,dx<\int_0^n e^{-x}\,dx \Leftrightarrow u_n<[-e^{-x}]_0^n$$

$\Leftrightarrow u_n<1-e^{-n}<1$.

**c.** Déduire que $(V_n)$ est convergente.

- $U_n<1$.
- Monotonie de $U_n$ :

$$U_{n+1}-U_n=\int_0^{n+1} Ln(1+e^{-x})\,dx-\int_0^n Ln(1+e^{-x}\,dx$$

$$=\int_n^{n+1} Ln(1+e^{-x})\,dx>0\ car\ 1+e^{-x}>1.$$

D'où $U_n$ est croissante.

- Par suite $U_n$ est convergente.

***<u>BON TRAVAIL.</u>***

***<u>ON VOUS SOUHAITE LA REUSSITE.</u>***