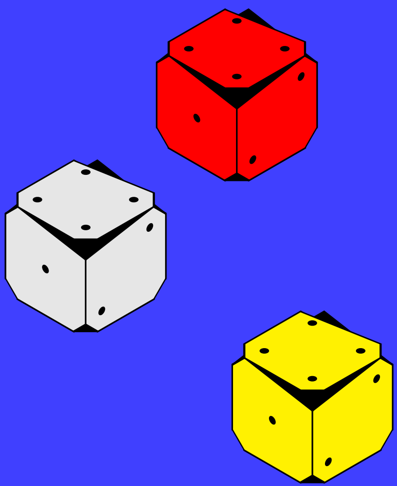
Maximun Proba

4ème Année

ENSEIGNEMENT SECONDAIRE



Pr : Ben Fredj sofiane

15 exercices corrigés

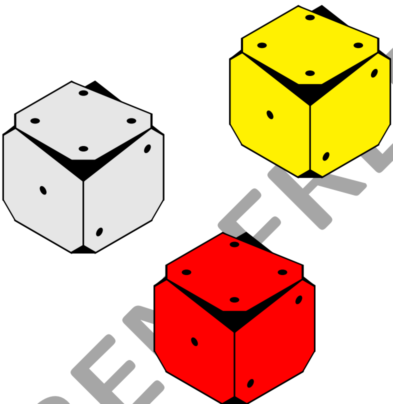
Collection bac français

Rejoindre notre page face book

Probabilités

EXERCICES CORRIGÉS

QUATRIÈME MATHS



PAR : BEN FREDJ SOFIANE

sofiane.benfradj@planet.tn

Table des matières

1 Énonces

Exercice 1 (France S 2008). La durée de vie, exprimée en heures, d'un agenda électronique est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où X est un réel strictement positif.

La fonction R définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ par $R(t) = P(X > t)$ est appelée fonction de fiabilité.

1. (a) Démontrer que pour tout $t \geqslant 0$ on a $R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}$.
   (b) Démontrer que la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s \geqslant 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X > t + s)$ ne dépend pas du nombre $t \geqslant 0$.
2. Dans cette question, on prend $\lambda = 0,00026$.
   (a) Calculer $P(X \leq 1000)$ et $P(X > 1000)$.
   (b) Sachant que l'évènement $(X > 1000)$ est réalisé, calculer la probabilité de l'évènement $(X > 2000)$.
   (c) Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, quelle est la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures ? Pouvait-on prévoir ce résultat ?

Exercice 2 (Nll Caledonie 2007). Un responsable de magasin achète des composants électroniques auprès de deux fournisseurs dans les proportions suivantes : 25% au premier fournisseur et 75% au second.
La proportion de composants défectueux est de 3% chez le premier fournisseur et de 2% chez le second.
On note :

- D l'évènement "le composant est défectueux " ;
- F_1 l'évènement "le composant provient du premier fournisseur " ;
- F_2 l'évènement "le composant provient du second fournisseur ".

1. (a) Dessiner un arbre pondéré.
   (b) Calculer $p\left(\mathrm{D} \cap \mathrm{F}_1\right)$, puis démontrer que $p(\mathrm{D}) = 0,0225$.
   (c) Sachant qu'un composant est défectueux, quelle est la probabilité qu'il provienne du premier fournisseur ?

   Dans toute la suite de l'exercice, on donnera une valeur approchée des résultats à 10^{-3} près.

2. Le responsable commande 20 composants. Quelle est la probabilité qu'au moins deux d'entre eux soient défectueux ?
3. La durée de vie de l'un de ces composants est une variable aléatoire notée X qui suit une loi de durée de vie sans vieillissement ou loi exponentielle de paramètre λ, avec λ réel strictement positif.
   (a) Sachant que $p(X > 5) = 0,325$, déterminer λ.
   Pour les questions suivantes, on prendra $\lambda = 0,225$.
   (b) Quelle est la probabilité qu'un composant dure moins de 8 ans ? plus de 8 ans ?
   (c) Quelle est la probabilité qu'un composant dure plus de 8 ans sachant qu'il a déjà duré plus de 3 ans ?

EXERCICE **3** (La Reunion S 2008). **Tous les résultats seront arrondis à10^{-2}près.**

Une entreprise produit en grande quantité des stylos. La probabilité qu'un stylo présente un défaut est égale à $0,1$.

1. On prélève dans cette production, successivement et avec remise huit stylos. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de stylos présentant un défaut parmi les huit stylos prélevés.
   (a) On admet que X suit une loi binomiale. Donner les paramètres de cette loi.
   (b) Calculer la probabilité des évènements suivants :
   - A : "il n'y a aucun stylo avec un défaut " ;
   - B : "il y a au moins un stylo avec un défaut" ;
   - C : "il y a exactement deux stylos avec un défaut".
2. En vue d'améliorer la qualité du produit vendu, on décide de mettre en place un contrôle qui accepte tous les stylos sans défaut et 20 :% des stylos avec défaut.
   On prend au hasard un stylo dans la production. On note D l'évènement "le stylo présente un défaut ", et E l'évènement "le stylo est accepté ".

(a) Construire un arbre traduisant les données de l'énoncé.

(b) Calculer la probabilité qu'un stylo soit accepté au contrôle.

(c) Justifier que la probabilité qu'un stylo ait un défaut sachant qu'il a été accepté au contrôle est égale à $0,022$ à 10^{-3} près.

3. Après le contrôle, on prélève, successivement et avec remise, huit stylos parmi les stylos acceptés.

   Calculer la probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos.
   Comparer ce résultat avec la probabilité de l'évènement A calculée à la question **1. b.**. Quel commentaire peut-on faire ?

EXERCICE **4 (**Liban S juin 2008**).** Une urne A contient quatre boules rouges et six boules noires.
Une urne B contient une boule rouge et neuf boules noires.
Les boules sont indiscernables au toucher.

Partie A

Un joueur dispose d'un dé à six faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. Il le lance une fois :
s'il obtient 1, il tire au hasard une boule de l'urne A,
sinon il tire au hasard une boule de l'urne B.

1. Soit R l'évènement "le joueur obtient une boule rouge".
   Montrer que $p(\mathrm{R}) = 0,15$.

2. Si le joueur obtient une boule rouge, la probabilité qu'elle provienne de A est-elle supérieure ou égale à la probabilité qu'elle provienne de B ?

Partie B

Le joueur répète deux fois l'épreuve décrite dans la partie A, dans des conditions identiques et indépendantes (c'est-à-dire qu'à l'issue de la première épreuve, les urnes retrouvent leur composition initiale).
Soit x un entier naturel non nul.
Lors de chacune des deux épreuves, le joueur gagne x euros s'il obtient une boule rouge et perd deux euros s'il obtient une boule noire.
On désigne par G la variable aléatoire correspondant au gain algébrique du joueur en euros au terme des deux épreuves. La variable aléatoire G prend donc les valeurs $2x, x-2$ et -4.

1. Déterminer la loi de probabilité de G.

2. Exprimer l'espérance E(G) de la variable aléatoire G en fonction de x.
3. Pour quelles valeurs de x a-t-on E(G) ¡ 0 ?

EXERCICE 5 (Antilles S 2006)**.** La durée d'attente exprimée en minutes à chaque caisse d'un supermarché peut être modélisée par une variable aléatoire T qui suit une loi exponentielle de paramètre strictement positif λ.

1/

a) Déterminer une expression exacte de λ sachant que $p(T \leq 10) = 0,7$. On prendra, pour la suite de l'exercice, la valeur $0,12$ comme valeur approchée de λ.

b) Donner une expression exacte de la probabilité conditionnelle
$P_{(T>10)}(T > 15)$.

c) Sachant qu'un client a déjà attendu 10 minutes à une caisse, déterminer la probabilité que son attente totale ne dépasse pas 15 minutes.

On donnera une expression exacte, puis une valeur approchée à $0,01$ près de la réponse.

2/ On suppose que la durée d'attente à une caisse de ce supermarché est indépendante de celle des autres caisses. Actuellement, 6 caisses sont ouvertes. On désigne par Y la variable aléatoire qui représente le nombre de caisses pour lesquelles la durée d'attente est supérieure à 10 minutes.

a)Donner la nature et les paramètres caractéristiques de Y.

b) Le gérant du supermarché ouvre des caisses supplémentaires si la durée d'attente à au moins 4 des 6 caisses est supérieure à 10 minutes.

Déterminer à $0,01$ près la probabilité d'ouverture de nouvelles caisses.

EXERCICE 6 (Nll caledonie S 2006)**.** Une maladie est apparue dans le cheptel bovin d'un pays. Elle touche 0,5 % de ce cheptel (ou 5 pour mille).

1. On choisit au hasard un animal dans le cheptel. Quelle est la probabilité qu'il soit malade ?
2. (a) On choisit successivement et au hasard 10 animaux. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre d'animaux malades parmi eux.
   Montrer que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres.
   Calculer son espérance mathématique.

   (b) On désigne par A l'évènement "aucun animal n'est malade parmi les 10 ".
   On désigne par B l'évènement "au moins un animal est malade parmi les 10 ".
   Calculer les probabilités de A et de B

3. On sait que la probabilité qu'un animal ait un test positif à cette maladie sachant qu'il est malade est $0,8$. Lorsqu'un animal n'est pas malade, la probabilité d'avoir un test négatif est $0,9$. On note T l'évènement "avoir un test positif à cette maladie" et M l'évènement "être atteint de cette maladie ".
   (a) Représenter par un arbre pondéré les données de l'énoncé.
   (b) Calculer la probabilité de l'évènement T.
   (c) Quelle est la probabilité qu'un animal soit malade sachant que le test est positif

EXERCICE 7 (Antilles S 1998). Un meuble est composé de 10 tiroirs $T_1, T_2, \ldots, T_{10}$. Une personne place au hasard une boule dans un des tiroirs et une autre est chargée de *trouver le tiroir contenant la boule* à l'aide de la stratégie suivante :
la personne ouvre le tiroir T_1. Si la boule est dans le tiroir T_1, la recherche est achevée, sinon la personne ouvre le tiroir T_2, et ainsi de suite ...en respectant l'ordre des numéros de tiroirs.
On remarquera qu'avec cette stratégie, le tiroir T_{10} n'est jamais ouvert.
Pour i entier compris entre 1 et 10 $(1 \leq i \leq 10)$, on appelle B_i l'évènement "La boule se trouve dans le tiroir T_i ".
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tiroirs qui ont été ouverts afin de localiser la boule avec cette stratégie.

1. Donner l'ensemble des valeurs possibles de X.
2. (a) Montrer que, pour i entier compris entre 1 et 8 $(1 \leq i \leq 8)$, l'évènement $(X = i)$ est l'évènement B_i.
   (b) Justifier que l'évènement $(X = 9)$ est la réunion des évènements B_9 et B_{10}.
   (c) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (d) Calculer l'espérance mathématique de X.

EXERCICE 8 (France S 2002). .

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.
   On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.
   Soit $\left(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{V}$ de coordonnées respectives :
   $$(a,\ -5,\ 1-a) \text{ et } (1+b,\ 1,\ b).$$

Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\frac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

   Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

   Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

   Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

   Pour tout entier n, on désigne par :

   A_n l'évènement : "A gagne la n-ième partie ",

   B_n l'évènement : "B gagne la n-ième partie ",

   C_n l'évènement : "le jeu continue après la n-ième partie "

   (a) Calculer les probabilités $p(A_1)$, $p(B_1)$ et $p(C_1)$.

   (b) Exprimer $p(C_{n+1})$ en fonction de $p(C_n)$ et montrer que :
   $$p(C_n) = \left(\frac{5}{8}\right)^n.$$
   Exprimer $p(A_{n+1})$ en fonction de $p(C_n$ et en déduire que :
   $$p(A_n) = \frac{3}{16}\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}.$$

   (c) Déterminer la limite de $p(A_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

   (d) Déterminer le plus petit entier n tel que $p(A_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

EXERCICE 9 (Polynésie S 2004). Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0,125$.

   On prendra $0,125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?
4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?
5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

EXERCICE **10.** Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).

12% des personnels sont des médecins et 71% sont des soignants.

67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
   (a) Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
   (b) Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
   (c) On sait que 80% du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
   En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.
2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0\,;\,1]$.
   On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?
3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
   Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

EXERCICE 11 (Centre étranger S 1999). .

1. Une urne U_1 contient 2 jetons numérotés 1 et 2.
   Une urne U_2 contient 4 jetons numérotés 1, 2, 3 et 4.
   On choisit au hasard une urne, puis un jeton dans cette urne.
   (Les choix sont supposés équiprobables)
   (a) Quelle est la probabilité de tirer un jeton portant le numéro 1 ?
   (b) On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?
2. On rassemble maintenant les deux urnes en une seule, qui contient donc les 6 jetons précédents. On tire simultanément et au hasard 2 jetons de cette urne. Les tirages sont supposés équiprobables.
   (a) Calculer la probabilité de tirer 2 jetons identiques.
   (b) Soit S la variable aléatoire qui, à chaque tirage , associe la somme des numéros des 2 jetons tirés.
   Déterminer la loi de probabilité de S.
   (c) Deux joueurs, Claude et Dominique, décident que si la somme des numéros tirés est impaire, Claude donne 10 euros à Dominique et que, dans le cas contraire, Claude reçoit λ euros de Dominique.
   On note X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le gain algébrique de Claude.
   Calculer l'espérance mathématique de X en fonction de λ puis déterminer λ pour que le jeu soit équitable (c'est à dire pour que $E(X)$ soit égale à 0).

EXERCICE 12 (Remplacement S 99). Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient trois boules noires et une boule blanche.

On considère l'expérience suivante :

On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.

Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'événement : aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées et B l'événement : le jeton est tombé sur la face blanche.

a) Calculer $\mathrm{P}(E_0 \cap B)$, $\mathrm{P}(E_0 \cap \overline{B})$, puis $\mathrm{P}(E_0)$.

b) On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?

2. On appelle E_1 l'événement : une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées et B l'événement : le jeton est tombé sur la face blanche.

   a) Calculer la probabilité de l'événement E_1.

   b) On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.

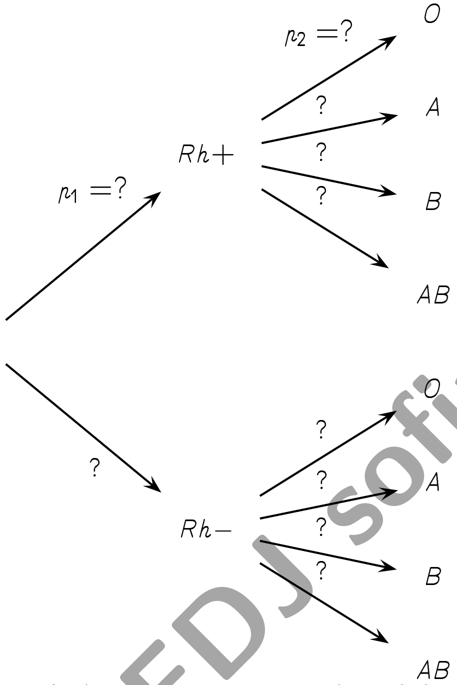
   Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois une et une seule boule blanche ?

EXERCICE 13 (Asie S 99). Voici le tableau des principaux groupes sanguins des habitants de la France :

	O	*A*	*B*	*AB*
Rhésus +	*35,0 %*	*38,1 %*	*6,2 %*	*2,8 %*
Rhésus -	*9,0 %*	*7,2 %*	*1,2 %*	*0,5 %*

Dans cet exercice, les résultats numériques demandés seront, s'il y a lieu, arrondis à 3 décimales.

1. L'objectif de cette question est de compléter à l'aide de données de ce tableau l'arbre suivant, à recopier sur la copie.



L'expérience consiste à choisir une personne au hasard dans la population donnée
(les habitants de la France).
On note Rh+ l'évènement " la personne a le facteur Rh+ "
On note O l'évènement " la personne appartient au groupe O "

(a) Déterminer la probabilité p_1, c'est à dire $p\left(\mathrm{Rh+}\right)$. On détaillera le calcul effectué puis on reportera ce résultat dans l'arbre.
Déterminer de même la probabilité p_2 (en détaillant les calculs).

(b) Compléter le reste de l'arbre, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante (il est inutile de détailler les nouveaux calculs).

2. (a) Comment peut-on, à partir de l'arbre complété, déterminer la probabilité de O ?
Vérifier ce résultat à l'aide du tableau.

(b) Quelle est la probabilité pour qu'une personne appartenant au groupe O ait le facteur Rh+ ?

3. (a) On considère n personnes choisies au hasard dans la population donnée (les habitants de la France).

Calculer, en fonction de n, la probabilité p pour qu'il y ait, parmi elles, au moins une personne du groupe O.

(b) Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle on a $p > 0,999$.

EXERCICE 14 (Centre étranger 2000). Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes et 2 vertes.

Dans la question 1) on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les événements suivants :
   A : « Les trois boules sont rouges »
   B : « Les trois boules sont de la même couleur »
   C : « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente »

   (a) Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

   (b) On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est à dire n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les événements suivants :
   D : « Tirer deux boules rouges »
   E : « Tirer deux boules de la même couleur »

   (a) Montrer que la probabilité de l'événement D est :
   $$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

   (b) Calculer la probabilité de l'événement E, $p(E)$ en fonction de n.
   Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geq \frac{1}{2}$?

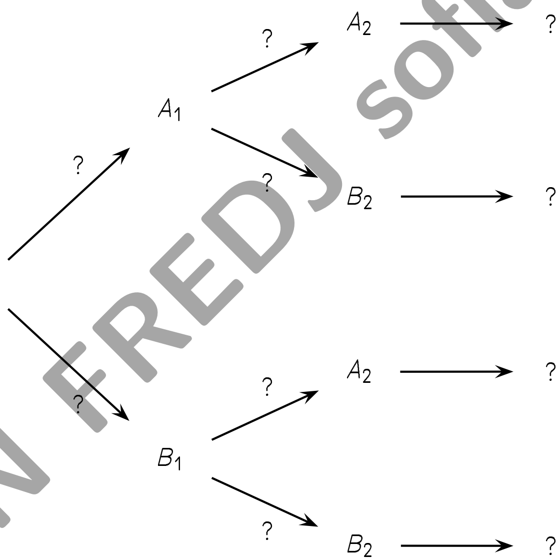
EXERCICE 15 (Guadeloupe S 2000). Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le film B.
Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le film A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe.

On considère les événements suivants :
A_1 : " La personne interrogée a vu le film A le premier samedi " ;
A_2 : "La personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi " ;
B_1 : " La personne interrogée a vu le film B le premier samedi " ;
B_2 : " La personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi " ;

1. (a) Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

   (b) Calculer les probabilités de chacun des événements suivants : $p(A_2/A_1)$, $p(A_2/B_1)$ et $p(A_1 \cap A_2)$.

   (c) Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. (Aucune justification n'est demandée pour cette question).



   (d) Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F, et de 20 F pour le film B.
   On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

   (a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   (b) Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

2

CORRIGÉS

SOLUTION 1 (France S 2008). .

1. (a) $R(t)=P(X>t)=e^{-\lambda t}$

   (b) $P_{X>t}(X>t+s)=\dfrac{P((X>t)\cap(X>t+s))}{P(X>t)}=$
   $$\frac{P(X>t+s)}{P(X>t)}=\frac{\mathrm{e}^{-\lambda(t+s)}}{\mathrm{e}^{-\lambda t}}=e^{-\lambda s}$$
   Donc la variable X suit une loi de durée de vie sans vieillissement, c'est-à-dire que pour tout réel $s\geq 0$, la probabilité conditionnelle $P_{X>t}(X>t+s)$ ne dépend pas du nombre $t\geq 0$.

2. Dans cette question, on prend $\lambda=0,00026$.

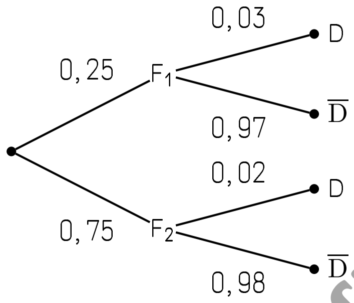
   (a)
   $$\begin{aligned}P(X\leq 1000) &= 1-P(X>1000)=1-e^{-0,00026\times 1000}\\ &\simeq 0,23\end{aligned}$$
   $P(X>1000)=\mathrm{e}^{-0,00026\times 1000}=\mathrm{e}^{-0,26}\simeq 0,77.$

   (b) $P_{X>1000}(X>2000)=\mathrm{e}^{-0,00026\times 1000}=\mathrm{e}^{-0,26}.$
   Sachant que l'événement $(X>1000)$ est réalisé, la probabilité de l'événement $(X>2000)$ est d'environ 0,77.

   (c) $P_{X>2000}(X>3000)=\mathrm{e}^{-0,00026\times 1000}=\mathrm{e}^{-0,26}$
   Sachant qu'un agenda a fonctionné plus de 2000 heures, la probabilité qu'il tombe en panne avant 3000 heures est aussi de 0,77.
   C'était prévisible car X suit une loi de durée de vie sans vieillissement.

SOLUTION **2** (Nll Caledonie 2007). .

1. (a) Arbre pondéré.



(b) $p\left(\mathrm{D} \cap \mathrm{F}_1\right) = p\left(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{D}\right) = 0,25 \times 0,03 = 0,007\,5.$
De même $p\left(\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}\right) = 0,75 \times 0,02 = 0,015.$
Donc

$$p(D) = p\left(\mathrm{F}_1 \cap \mathrm{D}\right) + p\left(\mathrm{F}_2 \cap \mathrm{D}\right) = 0,0075 + 0,015 = 0,0225.$$

(c) On sait que $p_{\mathrm{D}}(F_1) = \dfrac{p\left(\mathrm{D} \cap \mathrm{F}_1\right)}{p\left(\mathrm{F}_1\right)} = \dfrac{0,03}{0,09} = \dfrac{1}{3}.$

2. La probabilité d'avoir k composants défectueux sur 20 est :

$$p(X = k) = \mathrm{C}_{20}^{k} 0,0225^{k} \times (1 - 0,0225)^{20-k}.$$

(épreuve de Bernoulli avec $n = 20$ et $p = 0,02255$.)
La probabilité d'avoir au moins deux composants défectueux est égale à :

$$p(X \geq 2) = 1 - p(X = 0) - p(X = 1) = 1 - 0,9775^{20} - 20 \times 0,0225 \times 0,9775^{19}.$$

Donc $p(X \geq 2) \approx 0,0736 \approx 0,074.$

3. (a) On sait que $p(X > 5) = \mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,325.$
Or $\mathrm{e}^{-5\lambda} = 0,325 \iff -5\lambda = \ln 0,325 \iff \lambda = \dfrac{-\ln 0,325}{5} \approx 0,2247 \approx 0,225.$

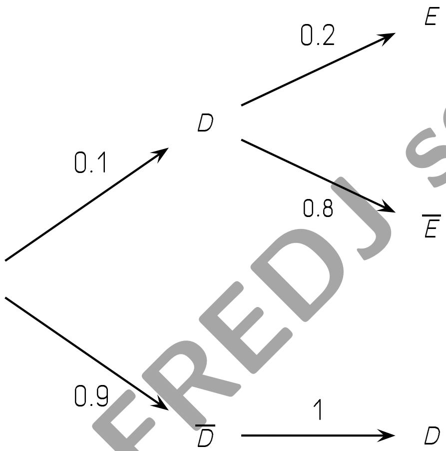
(b) $p(X < 8) = 1 - p(X \geq 8) = 1 - \mathrm{e}^{0,225 \times 8} \approx 0,835.$
D'où

$$p(X \geq 8) = 1 - p(X < 8) \approx 1 - 0,835 \approx 0,165$$

(c) La loi étant sans vieillissement la probabilité est $p(X > 5) = 0,325.$

SOLUTION **3.** .

1. (a) On a la loi binomiale $\mathcal{B}(8\ ;\ 0,1)$, de paramètres $n = 8$ et $p = 0,1$.
   (b) $p(A) = p(X = 0) = C_8^0 \times 0,1^0 \times 0,9^8 \approx 0,430 \approx 0,43$, à 10^{-2} près.
   $p(B) = p(X \geq 1) = 1 - p(X = 0) = 1 - p(A) \approx 0,57$, à 10^{-2} près.
   $p(C) = p(X = 2) = C_8^2 \times 0,1 \times 0,9^6 \approx 0,148 \approx 0,15$, à 10^{-2} près.
   (c) On a l'arbre de probabilités suivant :

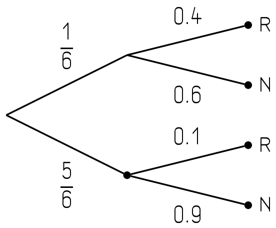


   (d) En utilisant les branches conduisant à E et en utilisant la formule des probabilités totales :
   $p(E) = p(D) \times p_D(E) + p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(E) = 0,1 \times 0,2 + 0,8 \times 1 = 0,92.$
   (e) $p_E(D) = \dfrac{p(E \cap D)}{p(E)} = \dfrac{0,02}{0,92} = \dfrac{1}{46} \approx 0,0217 \approx 0,022$, à 10^{-3} près.
2. On a à nouveau une épreuve binomiale de paramètre $n = 8$ et $p = 1 - 0,022 = 0,978$. La probabilité qu'il n'y ait aucun stylo avec un défaut dans ce prélèvement de huit stylos est :
   $C_8^0(0,978)^8 \times 0,022^1 \approx 0,84$ à 10^{-2} près.
   Conclusion : ce contrôle permet de presque doubler les chances d'avoir un lot de huit stylos sans défaut.

SOLUTION **4** (Liban S 2008). .

Partie A

1. On a l'arbre suivant :



On a donc $p(\mathrm{R}) = \frac{1}{6} \times \frac{4}{10} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{10} = \frac{4}{60} + \frac{5}{60} = \frac{9}{60} = \frac{3}{20} = \frac{15}{100} = 0,15$.

2. Il faut comparer $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{A})$ et $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{B})$.

$p_{\mathrm{R}}(\mathrm{A}) = \frac{p(\mathrm{A} \cap \mathrm{R})}{p(\mathrm{R})} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{4}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{4}{60} \times \frac{20}{3} = \frac{4}{9}$.

$p_{\mathrm{R}}(\mathrm{B}) = \frac{p(\mathrm{B} \cap \mathrm{R})}{p(\mathrm{R})} = \frac{\frac{5}{6} \times \frac{1}{10}}{\frac{3}{20}} = \frac{\frac{5}{60}}{\frac{3}{20}} = \frac{5}{60} \times \frac{20}{3} = \frac{5}{9}$.

On a donc $p_{\mathrm{R}}(\mathrm{A}) < p_{\mathrm{R}}(\mathrm{B})$.

Partie B

1. La probabilité d'avoir deux boules rouges est égale à : $0,15^2 = 0,0225$.
La probailité d'avoir une rouge et une noire est : $2 \times 0,15 \times (1 - 0,15) = 0,255$.
La probabilité d'avoir deux noires est : $0,85^2 = 0,7225$.
Le tableau de la loi de probabilité de G est donc ;

g	$2x$	$x-2$	-4
$P(G=g)$	0.0225	0.255	07225

2. $\mathrm{E(G)} = 2x \times 0,0225 + 0,255(x-2) + 0,7225 \times (-4) = 0,3x - 3,4$.
3. $\mathrm{E(G)} \geq 0 \iff 0,,x - 3,4 \geq 0 \iff 0,3x \geq 3,4 \iff x \geq 11,333$.
Il faut donc que le gain soit au moins de 12 euro (car $x \in \mathbb{N}$).

SOLUTION 5 (Antilles S 2006). .

1. (a) $p(T \leq 10) = 0,7 \iff 1 - e^{-10\lambda} = 0,7 \iff e^{-10\lambda} = 0,3$, on en déduit par croissance de la fonction ℓn, $-10\lambda = \ell n\, 0,3 \iff \lambda = -\dfrac{\ell n\, 0,3}{10}$.
Désormais $\lambda \approx 0,12$.

   (b) Par définition de la probabilité conditionnelle :

$$p_{(T>10)}(T > 15) = \frac{p\left((T > 10) \cap (T > 15)\right)}{p(T > 10)}$$
$$= \frac{p(T > 15)}{p(T > 10)} = \frac{e^{-0.12\times 15}}{e^{-0.12\times 10}} = 0.548$$

   (c) la probabilité cherchée est $p(T \leq 5) = 1 - e^{-0,6}$.
La probabilité est d'environ $0,451 \approx 0,45$.

   (d) On a une épreuve de Bernoulli avec $n = 6$ et $p = 0,3$.

   (e) On a $p(Y \geq 4) = p(Y = 4) + p(Y = 5) + p(Y = 6) = C_6^4 0,3^4 \times 0,7^2 + C_6^5 0,3^5 \times 0,7^1 + C_6^6 0,3^6 \times 0,7^0 = 15 \times 0,3^4 \times 0,7^2 + 6 \times 0,3^5 \times 0,7 + 0,3^6 \approx 0,070$.
La probabilité d'ouvrir de nouvelles caisses est d'environ $0,07$ à 10^{-2} près.

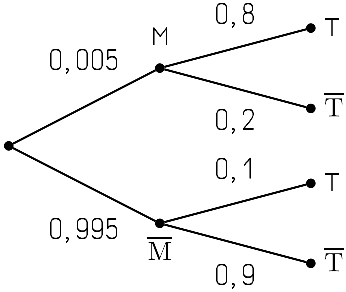
SOLUTION 6 (Nll caledonie 2006). .

1. La probabilité est de $\dfrac{5}{1000} = \dfrac{0,5}{100} = 0,005$.

2. (a) On suppose le cheptel assez important, donc le tirage successif de 10 animaux est une épreuve de Bernoulli de paramètres : $n = 10$ et de probabilité $p = 0,005$.
On a $E = n \times p = 10 \times 0,005 = 0,05$.

   (b) On a $p(A) = C_{10}^0 \times 0,005^0 \times 0,995^{10} = 0,995^{10} \approx 0,951$.
On a $p(B) = 1 - p(A) = 1 - 0,995^{10} \approx 0,049$.

   (c) On a l'arbre suivant :



(d) On $p(\mathrm{T}) = p_{\mathrm{M}}(\mathrm{T}) + p_{\overline{\mathrm{M}}}(\mathrm{T}) = 0,005 \times 0,8 + 0,995 \times 0,1 = 0,004 + 0,0995 = 0,1035$.

(e) D'après la formule de la probabilité conditionnelle :
$p_{+}(\mathrm{M}) = \dfrac{p(+ \cap \mathrm{M})}{p(+)} = \dfrac{0,005 \times 0,8}{0,1035} \approx 0,038$.

SOLUTION 7 (Antilles S 1998). .

1. On a $1 \leq X \leq 9$.
2. (a) Soit i entier compris entre 1 et 8 $(1 \leq i \leq 8)$; si $(X = i)$ cela veut dire que la boule est dans le i-ième tiroir ce qui correspond à l'évènement B_i.

   (b) Si $(X = 9)$ ou la boule dans le 9e tiroir (évènements B_9), soit elle n'y est pas mais alors elle est dans le 10e tiroir (évènements B_{10}).
   Donc $(X = 9)$ est la réunion des évènements B_9 et B_{10}.

   (c) Pour $1 \leq i \leq 8$ la probabilité $p_i = \dfrac{1}{10}$. Par contre $p(X = 9) = \dfrac{2}{10}$ d'après la réponse ci-dessus.
   La loi de probabilité de X :
   $P(X = k) = \dfrac{1}{10}$ pour $1 \leq k \leq 8$ et $P(X = 9) = \dfrac{2}{10}$

   (d) $E(X) = \dfrac{1+2+3+4+5+6+7+8+18}{10} = \dfrac{54}{10} = \dfrac{27}{5}$.

SOLUTION 8 (France 2002). .

1. Les vecteurs sont orthogonaux si et seulement leur produit scalaire (le repère est orthonormal) est nul. D'où

$$\begin{aligned} \vec{U}.\vec{V} = 0 &\iff a(1+b) - 5 + b(1-a) = 0 \\ &\iff a + b - 5 = 0 \iff a + b = 5. \end{aligned}$$

Les tirages $(a,\ b)$ favorables sont : $(1,\,4)$, $(2,\,3)$, $(3,\,2)$, et $(4,\,1)$ sur 4×4 tirages possibles.

$p\left(\vec{U}.\vec{V}=0\right)=\dfrac{4}{16}=\dfrac{1}{4}$.

2. (a) D'après la question **1.** A et B ont chacun 1 chance sur 4 d'obtenir des vecteurs orthogonaux et donc 3 chances sur 4 de ne pas obtenir des vecteurs orthogonaux.
Au premier jeu on a donc si A obtient une somme égale à 5 et B non (ou le contraire), $p(\mathrm{A}_1)=\dfrac{1}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{3}{16}=p(\mathrm{B}_1)$.
D'après la loi des probabilités totales, on a

$$p(\mathrm{A}_1)+p(\mathrm{B}_1)+p(\mathrm{C}_1)=1\iff p(\mathrm{C}_1)=1-\frac{6}{16}=\frac{10}{16}$$

$\left(\text{ou encore } p(\mathrm{C}_1)=\dfrac{5}{8}\right)$.

(b) À chaque nouveau jeu les probabilités de gagner pour A, gagner pour B et rejouer sont respectivement $\dfrac{3}{16}$, $\dfrac{3}{16}$ et $\dfrac{10}{16}$.

On a donc $p\left(\mathrm{C}_{n+1}\right)=p\left(C_n\right)\dfrac{10}{16}$. On reconnaît une suite géométrique de raison $\dfrac{10}{16}$. On a donc $p\left(\mathrm{C}_n\right)=\left(\dfrac{10}{16}\right)^n=\left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

De même $p\left(\mathrm{A}_{n+1}\right)=p\left(C_n\right)\times\dfrac{3}{16}=\left(\dfrac{5}{8}\right)^n\times\dfrac{3}{16}$, soit en décalant l'indice de 1 :

$$p\left(\mathrm{A}_n\right)=\frac{3}{16}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}$$

.

3. On a $-1<\dfrac{5}{8}<1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}=0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty}p\left(\mathrm{A}_n\right)=0$.

$$p\left(\mathrm{A}_n\right)<0,01\iff\frac{3}{16}\times\left(\frac{5}{8}\right)^{n-1}<10^{-2}\iff\ell\mathbf{n}\,\frac{3}{16}+(n-1)\ell\mathbf{n}\,\frac{5}{8}<-2\ell$$

$$\iff n-1\geq\frac{-2\ell\mathbf{n}\ 10-\ell\mathbf{n}\ \dfrac{3}{16}}{\ell\mathbf{n}\ \dfrac{5}{8}}$$

(ATTENTION : $\frac{5}{8} < 1$, donc $\ell\mathbf{n}\,\frac{5}{8} < 0$, l'ordre CHANGE) $\approx 6,2 \iff n > 7,2$. Conclusion le plus petit naturel est $n = 8$. (la calculatrice donne bien pour $n = 7$ une probabilité de $0,011$ et pour $n = 8$ une probabilité de $0,00698$.

SOLUTION **9** (Polynésie S 2004). .

1. X suit la loi de durée de vie suit une loi exponentielle de paramètre λ ; donc
$$p(X > 10) = \mathrm{e}^{-10\lambda} = 0,286 \iff -10\lambda = \ell\mathbf{n}\,0,286$$
ou encore $\lambda = -\frac{\ell\mathbf{n}\,0,286}{10}$.
La calculatrice donne $\lambda = 0,125$ à 10^{-3} près.
2. 6 mois = 0,5 année. On a donc $p(X \leq 0,5) = 1 - \mathrm{e}^{-0,125\times0,5} = 1 - \mathrm{e}^{-0,0625} \approx 0,061$.
3. L'appareil ayant déjà fonctionné 8 ans, la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans est égale à
$$p_{(X>8)}(X > 10) = \frac{p[(X > 10) \cap (X > 8)]}{p(X > 8)} = \frac{p(X > 10)}{p(X > 8)}$$
$$= \frac{\mathrm{e}^{-0,125\times10}}{\mathrm{e}^{-0,125\times8}} = \mathrm{e}^{-0,125\times2} \approx 0,779.$$
4. On a ici un schéma de Bernoulli, avec comme succès le fait pour un oscilloscope d'avoir une durée de vie supérieure à 10 ans, dont la probabilité est égale à 0,286 et un nombre d'appareils égal à 15.
La probabilité de n'avoir aucun oscilloscope en état de marche au bout de 10 ans est donc : $(1 - 0,286)^{15} = 0,714^{15}$.
Donc inversement la probabilité d'avoir au moins un oscilloscope en état de marche au bout de 10 ans est égale à :$1 - 0,714^{15} \approx 0,994$.
5. On reprend la question précédente avec non plus 15, mais n oscilloscopes. La probabilité qu'au moins 1 sur les n oscilloscopes fonctionne après 10 ans est donc : $1 - 0,714^{n}$.
Il faut chercher le plus petit naturel n tel que
$$1 - 0,714^{n} \geq 0,999 \iff 0,001 \geq 0,714^{n} \iff \ell\mathbf{n}\,0,001 \geq n\ell\mathbf{n}\,0,714$$
(par croissance de la fonction $\ell\mathbf{n}$), soit finalement $\frac{\ell\mathbf{n}\,0,001}{\ell\mathbf{n}\,0,714} \leq n$ (car $\ell\mathbf{n}\,0,714 < 0$). La calculatrice donne $20,5 \leq n$.
Le premier naturel convenant est donc 21.

SOLUTION 10. .

1. Soient les évènements :
   - F : "La personne interrogée est une femme"
   - H : "La personne interrogée est un homme "
   - S : "La personne interrogée est un soignant "
   - AT : "La personne interrogée est un membre du personnel administratif ou technique ".

   L'énoncé se traduit par les probabilités suivantes :
   $p(\mathrm{H}) = 0,12$;
   $p(\mathrm{S}) = 0,71$:
   $p_{\mathrm{M}}(\mathrm{H}) = 0,67$; $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) = 0,92$.

   (a) $p(\mathrm{S}) \neq 0$, donc $p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{S}\cap\mathrm{F})}{p(\mathrm{S})} \iff p(\mathrm{S}\cap\mathrm{F}) = p_{\mathrm{S}}(\mathrm{F}) \times p(\mathrm{S}) = 0,71 \times 0,92 = 0,6532$.

   (b) De même $p(\mathrm{M}\cap\mathrm{F}) = p_{\mathrm{M}}(\mathrm{F}) \times p(\mathrm{M}) = 0,33 \times 0,12 = 0,0396$.

   (c) Par définition $p_{\mathrm{AT}}(\mathrm{F}) = \dfrac{p(\mathrm{AT})\cap p(\mathrm{F})}{p(\mathrm{AT})}$.

   On sait que

   $$p(\mathrm{M}) + p(\mathrm{S}) + p(\mathrm{AT}) = 1 \iff p(\mathrm{AT}) = 1 - p(\mathrm{M}) - p(\mathrm{S}) = 1 - 0,12 - 0,71 = 0,17.$$

   D'autre part les femmes sont 80% et se répartisent en trois catégories : médecin, soignant, personnel administratif ou technique. Donc :

   $$\begin{aligned} p(\mathrm{F}) = 0,80 &= p(\mathrm{F}\cap\mathrm{M}) + p(\mathrm{F}\cap\mathrm{S}) + p(\mathrm{F}\cap\mathrm{AT}) \\ &\iff p(\mathrm{F}\cap\mathrm{AT}) = p(\mathrm{F}) - p(\mathrm{F}\cap\mathrm{M}) - p(\mathrm{F}\cap\mathrm{S}) \\ &= 0,80 - 0,0396 - 0,653 = 0,1072 \end{aligned}$$

3 On a ici un schéma de Bernoulli, avec $n = 40$ et $p = 0,25 = p(\mathrm{M})$.
On a $p_{10/40} = C_{20}^{10} 0,12^{10} \times (1 - 0,12)^{40-10} \approx 0,0113$

SOLUTION 11 (Centre étranger 1999). .

1. On a d'après le texte :

$$p(U_1) = p(U_2) = \frac{1}{2}$$

On désigne par :
- T_1 l'évènement " Tirer un jeton numéro 1 de l'urne U_1 "
- T_2 l'évènement " Tirer un jeton numéro 2 de l'urne U_2 "

(a) Comme T_1 et T_2 forment une partition de l'univers, on peut employer la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} p_1 &= p\left(U_1 \cap T_1\right) + p\left(U_2 \cap T_2\right) \\ &= p\left(U_1\right) \times p\left(T_1/U_1\right) + p\left(U_2\right) \times p\left(T_2/U_2\right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} \\ &= \frac{3}{8} \end{aligned}$$

en appelant p_1 la probabilité cherchée.

(b) On cherche la probabilité de U_1 sachant que T_1 est réalisé, d'où d'après la formule du cours :

$$p\left(U_1/T_1\right) = \frac{p(U_1 \cap T_1)}{p(T_1)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{\frac{3}{8}} = \frac{2}{3}$$

On a tiré un jeton portant le numéro 1. Quelle est la probabilité qu'il provienne de l'urne U_1 ?

2. L'urne contient donc 2 jetons numérotés 1, 2 jetons numérotés 2, 1 jeton numéroté 3 et un jeton numéroté 4.

(a) Soit p_2 la probabilité de tirer 2 jetons identiques. Cet évènement est la réunion des évènements disjoints " tirer 2 jetons numérotés 1 " et " tirer deux jetons numérotés 2 ". On en déduit :

$$p_2 = \frac{C_2^2}{C_6^2} + \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{2}{15}$$

(b) S prend les valeurs 2, 3, 4, 5, 6 et 7. On utilise le raisonnement précédent, c'est à dire que l'on décompose chaque évènement en union d'évènements incompatibles. On a alors :

$p\left(S=2\right) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$ (les deux jetons portent le numéro 1)

$p\left(S=3\right) = \frac{C_2^1 \times C_2^1}{C_6^2} = \frac{4}{15}$ (un jeton porte le numéro 2 et l'autre le numéro 3)

$p\left(S=4\right) = \frac{C_2^2}{C_6^2} + \frac{C_2^1 \times C_1^1}{C_6^2} = \frac{3}{15}$ (on tire soit 2 jetons numérotés 2, soit un jeton numéroté 1 et un jeton numéroté 3).

On peut alors donner la loi de probabilité de S dans le tableau suivant :

s_i	2	3	4	5	6	7
$p(S = s_i)$	$\frac{1}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{3}{15}$	$\frac{4}{15}$	$\frac{2}{15}$	$\frac{1}{15}$

(c) On a facilement :

$$p(X = -10) = p(S = 3) + p(S = 5) + p(S = 7) = \frac{9}{15}$$

$$p(X = \lambda) = p(S = 2) + p(S = 4) + p(S = 6) = \frac{6}{15}$$

L'espérance de X est donc donnée par :

$$E(X) = (-10)\left(\frac{9}{15}\right) + \lambda\left(\frac{6}{15}\right) = -6 + \frac{2}{5}\lambda$$

Le jeu est équitable si et seulement si $E(X) = 0 \Leftrightarrow \lambda = 15$.

SOLUTION **12 (**Rempl S 99**).** .

1. a) $(E_0|B)$ est l'événement : tirer 3 boules noires d'une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches. D'où $\mathrm{P}(E_0|B) = \dfrac{C_3^3}{C_5^3} = \dfrac{1}{10}$.

Comme $\mathrm{P}(B) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(E_0 \cap B) = \mathrm{P}(E_0|B) \times \mathrm{P}(B)$, il en résulte que $\boxed{\mathrm{P}(E_0 \cap B) = \dfrac{1}{20}}$

De manière analogue $(E_0|\overline{B})$ est l'événement : tirer 3 boules noires d'une urne contenant 4 boules noires et 1 boule blanche. D'où $\mathrm{P}(E_0|\overline{B}) = \dfrac{C_4^3}{C_5^3} = \dfrac{2}{5}$.

Comme $\mathrm{P}(\overline{B}) = \dfrac{1}{2}$ et $\mathrm{P}(E_0 \cap \overline{B}) = \mathrm{P}(E_0|\overline{B}) \times \mathrm{P}(\overline{B})$, il en résulte que $\boxed{\mathrm{P}(E_0 \cap \overline{B}) = \dfrac{1}{5}}$

Les événements $E_0 \cap B$ et $E_0 \cap \overline{B}$ sont incompatibles et de réunion E_0. D'où :

$\mathrm{P}\left(E_0\right) = \mathrm{P}\left(E_0 \cap B\right) + \mathrm{P}\left(E_0 \cap \overline{B}\right) = \dfrac{1}{20} + \dfrac{1}{5}$. Soit $\boxed{\mathrm{P}\left(E_0\right) = \dfrac{1}{4}}$.

b) On cherche dans cette question la probabilité de l'événement $\overline{B}|E_0$.

Or $\mathrm{P}\left(\overline{B}|E_0\right) = \dfrac{\mathrm{P}\left(\overline{B} \cap E_0\right)}{\mathrm{P}\left(E_0\right)} = \dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{1}{4}}$. D'où $\boxed{\mathrm{P}\left(\overline{B}|E_0\right) = \dfrac{4}{5}}$

2. On procède comme à la question précédente :
   E_1 est la réunion des événements incompatibles $E_1 \cap B$ et $E_1 \cap \overline{B}$.
   Or $\mathrm{P}\left(E_1 \cap B\right) = \mathrm{P}\left(E_1|B\right) \times \mathrm{P}\left(B\right)$ où $E_1|B$ est l'événement : tirer 2 boules noires et une boule blanche d'une urne contenant 3 boules noires et 2 boules blanches. Il en résulte que $\mathrm{P}\left(E_1|B\right) = \frac{C_3^2 \times C_2^1}{C_5^3}$, et par suite $\mathrm{P}\left(E_1 \cap B\right) = \dfrac{6}{10} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{10}$.
   De façon analogue

$$P(E_1 \cap \overline{B}) = P(E_1|\overline{B}) \times P(\overline{B}) = \frac{C_4^2}{C_5^3} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{10}.$$

   D'où $\boxed{\mathrm{P}\left(E_1\right) = \dfrac{3}{5}}$

3. On cherche ici à réaliser l'événement A : obtenir au moins une fois E_1 au cours de quatre tirages.
   Son contraire est de ne pas réaliser E_1 au cours des quatre tirages, soit de réaliser quatre fois l'événement contraire de E_1, de probabilité $\mathrm{P}\left(\overline{E_1}\right) = \dfrac{2}{5}$, au cours des quatre tirages. Par suite $\mathrm{P}(\overline{A}) = \left(\dfrac{2}{5}\right)^4$ donc $\mathrm{P}\left(A\right) = 1 - \left(\dfrac{2}{5}\right)^4$. Soit $\boxed{\mathrm{P}\left(A\right) = \dfrac{609}{625}}$

SOLUTION **13** **(**Asie S 99**)**. .

1. a) On désigne par A (respectivement B, AB) l'évènement " la personne appartient au groupe A (respectivement B, AB). On utilise la formule des probabilités totale, en vérifiant que les évènements O, A, B et AB forment

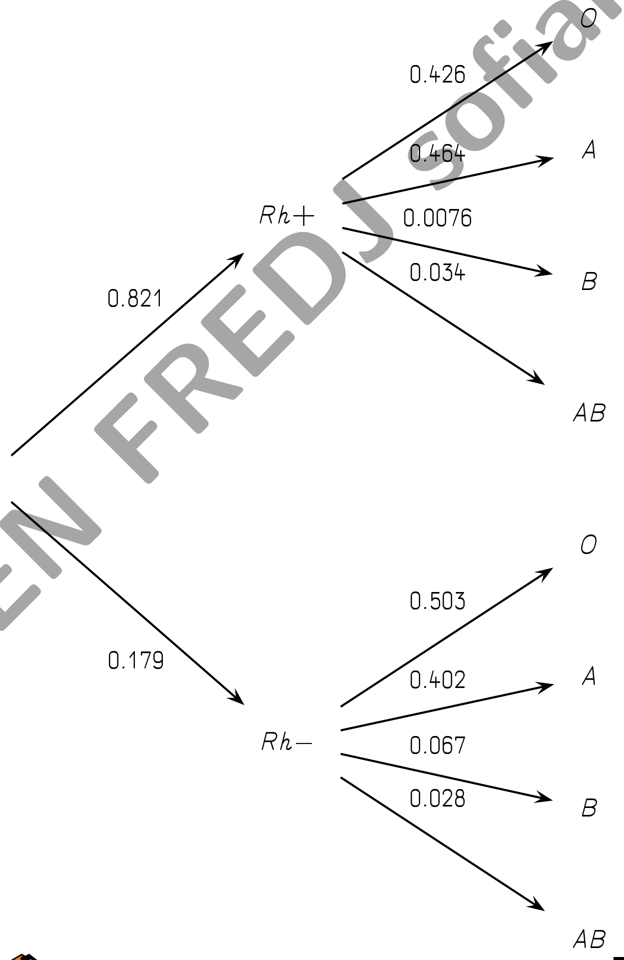
une partition de l'univers :

$$\begin{aligned} p\left(Rh+\right) &= p\left(Rh+\cap O\right)+p\left(Rh+\cap A\right)+p\left(Rh+\cap B\right)+p\left(Rh+\cap AB\right) \\ &= 0,35+0,381+0,062+0,028 \\ &= 0,821 \end{aligned}$$

La formule des probabilités conditionnelles fournit :

$$p_2 = p\left(O/Rh+\right) = \frac{p\left(O\cap Rh+\right)}{p\left(Rh+\right)} = \frac{0,35}{0,821} = 0,426$$

b) L'arbre de probabilité est alors complété :



2. a) En utilisant encore la formule des probabilités totale, on peut écrire, en remarquant que les évènements $Rh+$ et $Rh-$ forment une partition de l'univers :

$$\begin{aligned} p(O) &= p(O \cap Rh+) + p(O \cap Rh-) \\ &= p(Rh+) \times p(O/Rh+) + p(Rh-) \times p(O/Rh-) \\ &= 0,821 \times 0,426 + 0,179 \times 0,503 \\ &\simeq 0,440 \end{aligned}$$

En utilisant le tableau des données, on a :

$$p(O) = 0,35 + 0,09 = 0,44$$

b) On cherche l'évènement $Rh+$ sachant que O est réalisé, donc

$$p(Rh+/O) = \frac{p(Rh+\cap O)}{p(O)} = \frac{0,35}{0,44} \simeq 0,795$$

3. a) La probabilité de ne pas appartenir au groupe O est égale à $1 - 0,44 = 0,56$.
On utilise l'évènement contraire, qui est qu'aucune personne sur les n n'appartienne au groupe O. On a donc :

$$p = 1 - 0,56^n$$

b) On obtient les inégalités :

$$p \geq 0,999 \Leftrightarrow 1 - 0,56^n \geq 0,999 \Leftrightarrow 0,56^n \leq 0,001$$

La croissance stricte de la fonction logarithme permet d'avoir l'équivalence :

$$0,56^n \leq 0,001 \Leftrightarrow n\ln 0,56 \leq \ln 0,001 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,001}{\ln 0,56}$$

Comme

$$\frac{\ln 0,001}{\ln 0,56} \simeq 11,9$$

on peut affirmer que la plus petite valeur de n qui convient est égale à 12.

SOLUTION **14** (Centre étranger 2000). .

1. Nous sommes manifestement dans un cadre d'équiprobabilité. La formule :

$$p(A) = \frac{\text{Nombre de cas favorables à la réalisation de } A}{\text{Nombre de cas possibles}}$$

permet de répondre aux questions posées. Les tirages étant simultanés, l'emploi des C_n^p est évidemment justifié.

(a) L'évènement A se réalise en tirant 3 boules rouges parmi les 5 de l'urne, d'où :

$$p(A) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{12}$$

L'évènement B est l'union des évènements incompatibles A et " les trois boules tirées sont noires ". D'où

$$p(B) = \frac{C_5^3}{C_{10}^3} + \frac{C_3^3}{C_{10}^3} = \frac{11}{120}$$

Pour réaliser l'évènement C, on tire une rouge parmi les 5 rouges, une jaune parmi les 3 jaunes, et une verte parmi les deux vertes. D'où :

$$p(C) = \frac{C_5^1 \times C_3^1 \times C_2^1}{C_{10}^3} = \frac{1}{4}$$

(b) La variable aléatoire X prend les valeurs 1, 2 ou 3.

$$p(X=1) = p(B) = \frac{11}{120}$$

$$p(X=3) = p(C) = \frac{1}{4}$$

$$p(X=2) = 1 - p(X=1) - p(X=3) = \frac{79}{120}$$

L'espérance de X vaut alors

$$E(X) = 1 \times \frac{11}{120} + 2 \times \frac{79}{120} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{259}{120}$$

2. En adaptant le raisonnement de la question précédente, on a :

(a)

$$p(D) = \frac{C_n^2}{C_{n+5}^2} = \frac{\frac{n(n-1)}{2}}{\frac{(n+5)(n+4)}{2}} = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}$$

(b) De même, la probabilité de tirer 2 boules jaunes est :

$$\frac{C_3^2}{C_{n+5}^2} = \frac{6}{(n+5)(n+4)}$$

et la probabilité de tirer 2 boules vertes est :

$$\frac{C_2^2}{C_{n+5}^2} = \frac{2}{(n+5)(n+4)}$$

L'évènement E est la réunion des deux évènements précédents avec D, et comme ces évènements sont deux à deux incompatibles :

$$p(E) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)} + \frac{6}{(n+5)(n+4)} + \frac{2}{(n+5)(n+4)}$$
$$= \frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)}$$

On a les inéquations suivantes :

$$p(E) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{n^2-n+8}{(n+5)(n+4)} \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\left(n^2-n+8\right) \geq (n+5)(n+4)$$

puisque $(n+5)(n+4)$ est un facteur strictement positif. On en déduit :

$$p(E) \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2\left(n^2-n+8\right)-(n+5)(n+4) \geq 0 \Leftrightarrow n^2-11n-4 \geqslant 0$$

D'après le signe du trinôme, cette inéquation a pour solution :

$$\left]-,\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{137}\right] \cup \left[\frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{137},+\right[$$

Les entiers n cherchés vérifient donc

$$n \geq 12$$

puisque

$$\frac{11}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{137} \simeq -0.352\,35 \qquad \frac{11}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{137} \simeq 11.352$$

SOLUTION 15 (Guadloupe S 2000). .

1. a) Le premier samedi, 8 personnes ont vu le film A et 14 le B. Le deuxième samedi, 16 (4 et 12) ont vu le film A et 6 (2 et 4) ont vu le film B. Donc :

$$p(A_1) = \frac{8}{22} = \frac{4}{11} \qquad p(A_2) = \frac{16}{22} = \frac{8}{11}$$

b) D'après la formule des probabilités conditionnelles :

$$p(A_2/A_1) = \frac{p(A_2 \cap A_1)}{p(A_1)} = \frac{\frac{4}{22}}{\frac{8}{22}} = \frac{1}{2}$$

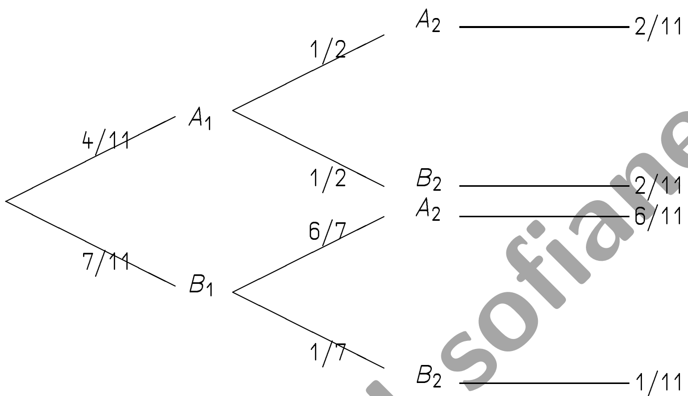
puisque 4 personnes ont vu le film A la première et la deuxième semaine.

$$p(A_2/B_1) = \frac{p(A_2 \cap B_1)}{p(B_1)} = \frac{\frac{12}{22}}{\frac{14}{22}} = \frac{6}{7}$$

et enfin

$$p(A_1 \cap A_2) = \frac{4}{22}$$

c) L'arbre pondéré complété donne :



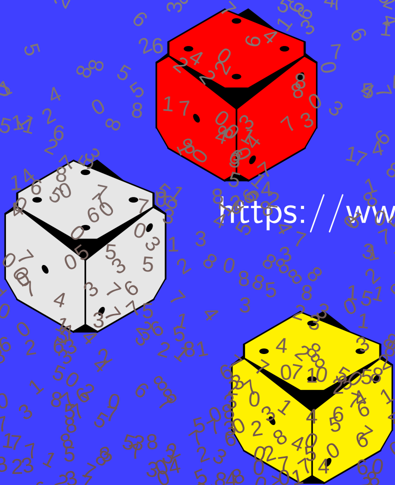
d) Commme A_1 et B_1 forment une partition de l'univers, on a :

$$p(A_2) = p(A_2 \cap A_1) + p(A_2 \cap B_1) = \frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{8}{11}$$

en lisant les valeurs sur l'arbre pondéré.

2. a) X peut prendre les valeurs 40, 50 et 60.
   - X prend la valeur 40 si la personne interrogée a vu B les deux semaines. Donc :
   $$p(X = 40) = p(B_1 \cap B_2) = \frac{1}{11}$$
   - X prend la valeur 50 si la personne interrogée a vu A et B. Donc :
   $$p(X = 50) = p(A_1 \cap B_2) + p(B_1 \cap A_2) = \frac{2}{11} + \frac{6}{11} = \frac{8}{11}$$
   - X prend la valeur 60 si la personne interrogée a vu A les deux semaines. Donc :
   $$p(X = 60) = p(A_1 \cap A_2) = \frac{2}{11}$$
3. D'après la formule de cours :

$$E(X) = 40 \times p(X = 40) + 50 \times p(X = 50) + 60 \times p(X = 60) = \frac{560}{11}$$



https://www.facebook.com/sbfmath