

DEVOIR DE SYNTHÈSE

SECTION : SCIENCES DE L'INFORMATIQUE

ÉPREUVE : MATHÉMATIQUES

DURÉE : 3 h

COEFFICIENT : 3

Exercice 1 : (4 points)

1) Soit x un entier non nul. Si $x \equiv 9 \pmod{10}$ alors :

a) $x^{402} \equiv 1 \pmod{10}$

b) $x^{402} \equiv -1 \pmod{10}$

c) $x^{402} \equiv 9 \pmod{10}$.

2) Soit u la suite définie sur \mathbb{N}^* par $u_n = \frac{n^2 + 2}{n}$

a) $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$

b) (u_n) est majorée par 1

c) $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

3) Le quotient de la division Euclidienne de -20 par 7 est :

a) -3

b) -2

c) 2 .

4) La limite de la suite de terme général : $u_n = \ln\left(\ln\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)\right)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ est :

a) $+\infty$

b) $-\infty$

c) 0

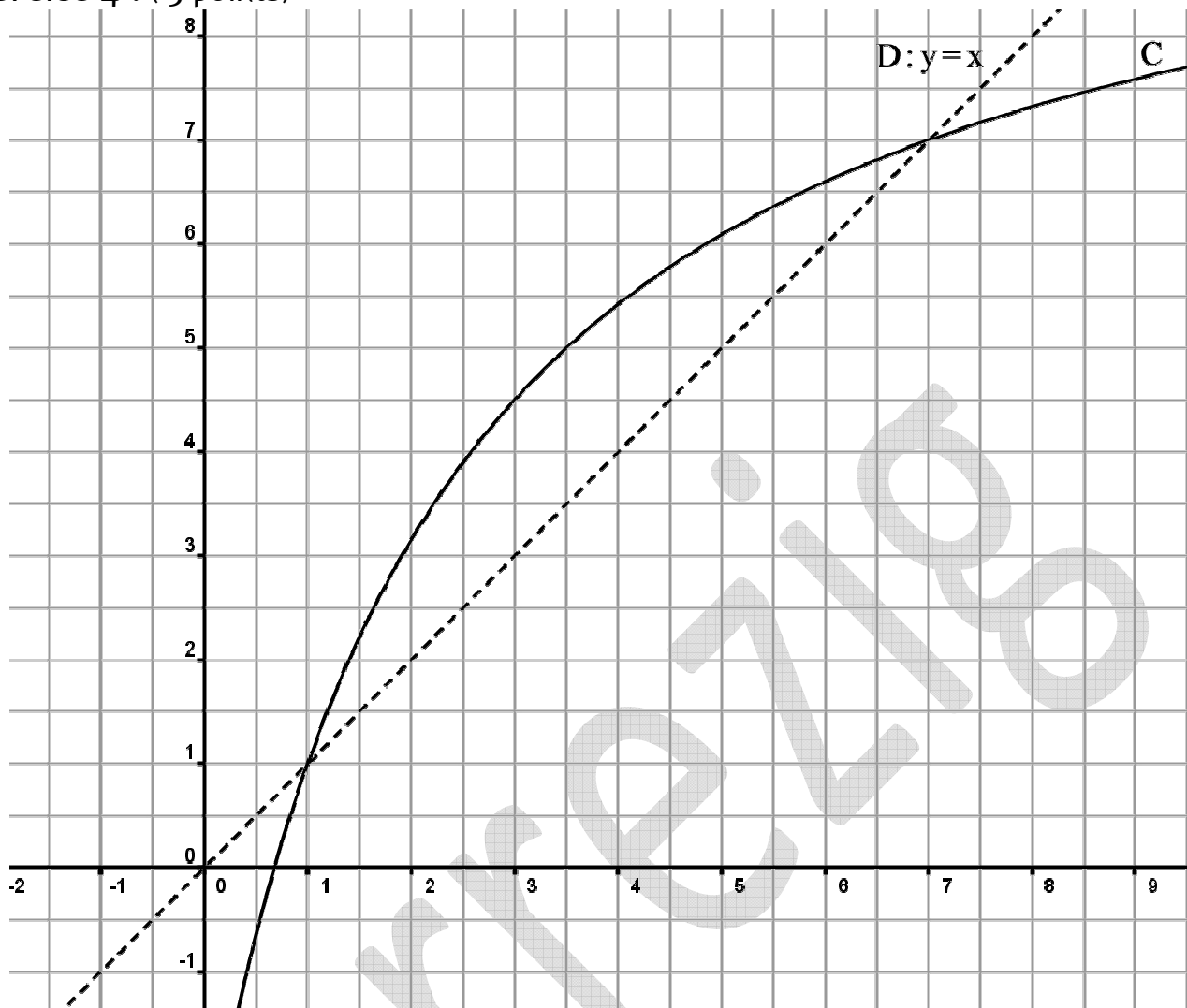
Exercice 2 : (5 points)

1) Déterminer le reste modulo 13 de 5^4 .2) En déduire les restes modulo 13 de chacun des entiers $5^{4k}, 5^{4k+1}, 5^{4k+2}, 5^{4k+3}$ avec $k \in \mathbb{N}$.3) Déterminer les restes modulo 13 de chacun des entiers $5^{202020202041}$ et $5^{555555555555}$.4) Déterminer l'ensemble des entiers naturels n , tels que $5^{2n} + 5^n \equiv 0 \pmod{13}$.

Exercice 3 : (6 points)

A- Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$ 1) Dresser le tableau de variation de g 2) a) Montrer que g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} b) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α . Vérifier que $1,7 < \alpha < 1,8$ c) En déduire suivant les valeurs de x , le signe de $g(x)$.3) a) Montrer que g^{-1} est dérivable sur \mathbb{R} .b) Calculer $g(1)$ et déduire $(g^{-1})'(1)$.B- Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)(1-\ln x)$ On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j}) 1) a) Montrer que : pour tout $x > 0$, $f'(x) = g(x)$ b) Dresser le tableau de variation de f .2) Déterminer les points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (O, \vec{i}) .3) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 1.4) Soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par :
$$\begin{cases} F(x) = (x^2 - 2x)(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$$
a) Étudier la continuité et la dérivabilité de F à droite en 0.b) Montrer que pour tout $x > 0$ on a : $F'(x) = 2 - x + 2f(x)$ c) En déduire la primitive de f sur $]0, +\infty[$; qui s'annule en 1.

Exercice 4 : (5 points)



On représente ci-dessus la courbe C d'une fonction f et la droite D : $y = x$

1) Utiliser le graphique pour justifier la proposition suivante : $f(x) > x$ pour $x \in [1, 7]$

2) (u_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$
 pour tout $n \in \mathbb{N}$

Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4 . Que peut-on dire de la suite (u_n) ?

3) (w_n) la suite définie par :
$$\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$$
 pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Placer sur l'axe des abscisses les points w_1, w_2 et w_3

b) Montrer par récurrence que $1 \leq w_n \leq 7$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) Montrer que (w_n) est croissante.

d) En déduire que (w_n) est convergente et calculer sa limite.

CORRECTION :

Exercice 1 : (4 points)

1) a) $x^{402} \equiv 1 \pmod{10}$	1 x 4
2) c) $u_n \geq n$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$	
3) a) -3	
4) b) $-\infty$	

Exercice 2 : (5 points)

1) $5 \equiv 5[13], 5^2 \equiv 12[13] \Leftrightarrow 5^2 \equiv -1[13]$ donc $5^4 \equiv 1[13]$	0,5
2) $5^4 \equiv 1[13] \Leftrightarrow 5^{4k} \equiv 1[13]$ $5^{4k+1} \equiv 5[13], 5^{4k+2} \equiv 12[13], 5^{4k+3} \equiv 8[13]$	2
3) Le reste de la division Euclidienne de 202020202041 par 4 est 1 donc $5^{202020202041} \equiv 5[13]$ Le reste de la division Euclidienne de 555555555555 par 4 est 3 donc $5^{555555555555} \equiv 8[13]$	1
4) $5^{2n} + 5^n \equiv 0[13]$ donc 13 divise $5^{2n} + 5^n = 5^n(5^n + 1)$ or 5^n et 13 sont premiers entre eux donc 13 divise $5^n + 1$ d'où $5^n + 1 \equiv 0[13] \Leftrightarrow 5^n \equiv -1[13] \Leftrightarrow 5^n \equiv 12[13]$ ainsi $n = 4k + 2, k \in \mathbb{N}$	1,5

Exercice 3 : (6 points)

A- Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = \frac{1}{x} - \ln(x)$

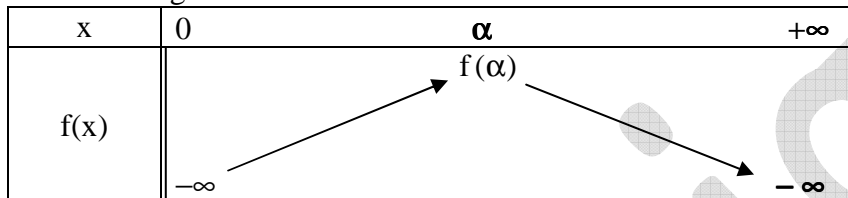
1) g est dérivable sur $]0, +\infty[$, $g'(x) = -\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = -\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x}\right) < 0$	0,5							
<table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">α</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> </tr> <tr> <td style="padding: 5px;">$g(x)$</td> <td style="padding: 5px;">$+\infty$</td> <td style="padding: 5px;">0</td> <td style="padding: 5px;">$-\infty$</td> </tr> </table> <p style="margin-left: 20px;">$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} - \ln(x) = +\infty, \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \ln(x) = -\infty$</p>		x	0	α	$+\infty$	$g(x)$	$+\infty$	0
x	0	α	$+\infty$					
$g(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$					
2) a) g est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$ donc elle réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $g(]0, +\infty[)$ or g est continue sur $]0, +\infty[$ donc $g(]0, +\infty[) = \left] \lim_{+\infty} g, \lim_{0^+} g \right[=]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$	0,5							
b) g est une bijection continue de $]0, +\infty[$ sur \mathbb{R} donc il existe un seul réel $\alpha \in]0, +\infty[$ tels que $g(\alpha) = 0$ ainsi l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]0, +\infty[$. $g(1,7) = \frac{1}{1,7} - \ln(1,7) \approx 0,06$ et $g(1,8) = \frac{1}{1,8} - \ln(1,8) \approx -0,03$ donc $g(1,7) \times g(1,8) < 0$ D'où $1,7 < \alpha < 1,8$	1							
c) D'après le tableau de variation de g : $g(x) < 0$ si $x > \alpha$ et $g(x) > 0$ si $0 < x < \alpha$	0,5							
3) a) g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $g'(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[$ donc g^{-1} est dérivable sur $g(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$.	0,5							

b) $g(1) = \frac{1}{1} - \ln(1) = 1$, $(g^{-1})'(1) = \frac{1}{g'(g^{-1}(1))} = \frac{1}{g'(1)} = -\frac{1}{2}$.	0,75
---	-------------

B- Soit la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par : $f(x) = (x-1)(1-\ln x)$. On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé (O, \vec{i}, \vec{j})

1) a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$, pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 \times (1 - \ln(x)) + (x-1) \times \left(-\frac{1}{x}\right)$ $= 1 - \ln(x) - 1 + \frac{1}{x} = \frac{1}{x} - \ln(x) = g(x)$	0,5
--	------------

b) le signe de f' est celui de g



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x-1)(1-\ln x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)(1-\ln x) = -\infty$$

2) $f(x) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(1-\ln x) = 0 \Leftrightarrow x-1=0$ ou $\ln(x)-1=0 \Leftrightarrow x=1$ ou $x=e$ les points d'intersection de la courbe (C) et de la droite (O, \vec{i}) sont $A(1,0)$ et $B(e,0)$	0,5
---	------------

3) $T: y = f'(1)(x-1) + f(1)$ $T: y = x-1$	0,25
--	-------------

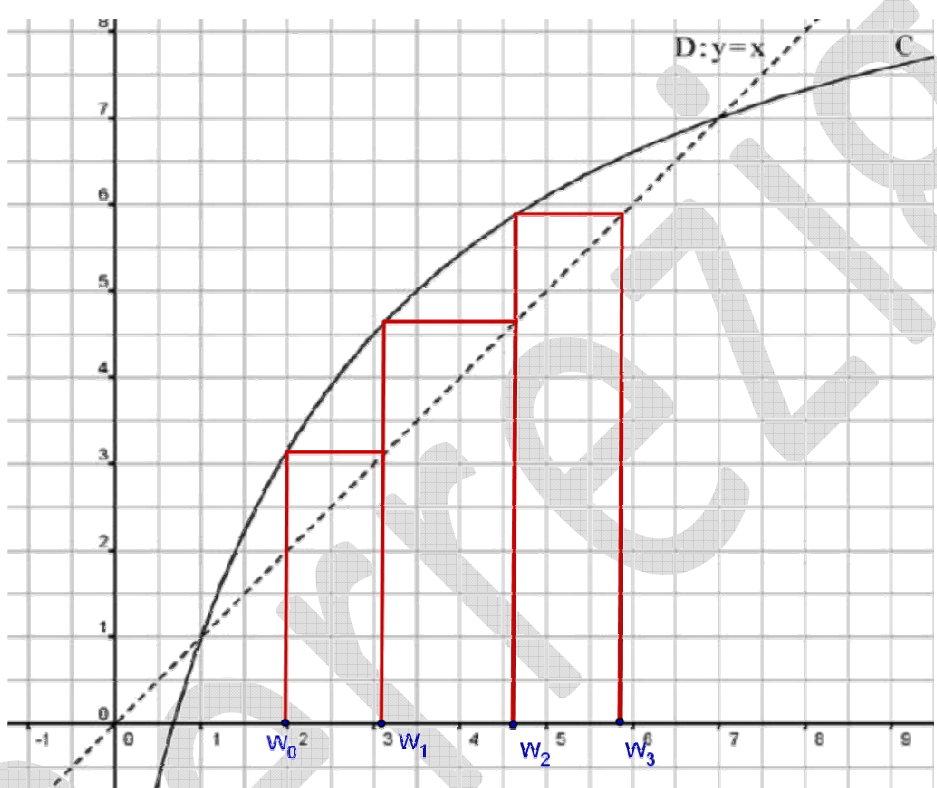
4) Soit la fonction F définie sur $[0, +\infty[$ par : $\begin{cases} F(x) = (x^2 - 2x)(1 - \ln x) & \text{si } x > 0 \\ F(0) = 0 \end{cases}$ a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x)(1 - \ln x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 2x - x^2 \ln x + 2x \ln x) = 0 = F(0)$ donc F est continue à droite en 0 . $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{F(x) - F(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 - 2x)(1 - \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x - 2)(1 - \ln x) = -\infty$ Donc F n'est pas dérivable à droite en 0 .	0,5
--	------------

b) Pour tout $x > 0$ on a : $F'(x) = (2x-2)(1-\ln x) + (x^2-2x)\left(-\frac{1}{x}\right) = 2(x-1)(1-\ln x) - x + 2$ d'où $F'(x) = 2 - x + 2f(x)$	0,5
--	------------

c) $F'(x) = 2 - x + 2f(x) \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{2}(F'(x) + x - 2)$ ainsi une primitive de f est $G(x) = \frac{1}{2} \left(F(x) + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right) + c, \quad c \in \mathbb{R}.$ $G(1) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \left(F(1) + \frac{1}{2} - 2 \right) + c = 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{4} + c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{5}{4}$ $G(x) = \frac{1}{2} \left(F(x) + \frac{1}{2}x^2 - 2x \right) + \frac{5}{4}$	0,5
--	------------

Exercice 4 : (5 points)

On représente ci-dessus la courbe C d'une fonction f et la droite

<p>1) pour tout $x \in [1, 7]$ la courbe C de f est au dessus ou sur la droite D : $y = x$ donc $f(x) \geq x$</p>	0,5
<p>2) $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ $u_1 = f(u_0) = f(1) = 1$, $u_2 = f(u_1) = f(1) = 1$, $u_3 = f(u_2) = f(1) = 1$ et $u_4 = f(u_3) = f(1) = 1$ la suite (u_n) est constante.</p>	1
<p>3) (w_n) la suite définie par : $\begin{cases} w_0 = 2 \\ w_{n+1} = f(w_n) \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$</p> <p>a)</p> 	0.75
<p>b) Pour $n = 0$, $w_0 = 2$ ainsi $1 \leq w_0 \leq 7$ donc la proposition est vraie pour $n = 0$. Supposons que pour un $n > 0$, $1 \leq w_n \leq 7$ Montrons que $1 \leq w_{n+1} \leq 7$ $1 \leq w_n \leq 7$ comme f est croissante sur $[1, 7]$ donc $f(1) \leq f(w_n) \leq f(7)$ par suite $1 \leq w_{n+1} \leq 7$ D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq w_n \leq 7$</p>	1
<p>c) Pour tout $x \in [1, 7]$, $f(x) > x$ or $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq w_n \leq 7$ donc $f(w_n) \geq w_n$ d'où $w_{n+1} \geq w_n$ La suite (w_n) est croissante</p>	1
<p>d) La suite (w_n) est croissante et majorée par 7 don elle converge vers une limite $\ell \in [1, 7]$ et comme $w_{n+1} = f(w_n)$ et f est continue sur $[1, 7]$ donc ℓ est la solution de l'équation $f(\ell) = \ell$ donc $\ell = 1$ ou $\ell = 7$ comme (w_n) est croissante donc $\ell = 7$</p>	0,75