Exercice 1 (3 points)

Pour chacune des questions suivantes indiquer la réponse correcte.

1) La composée d'une symétrie centrale et d'une translation du plan est une symétrie :

a) axiale b) centrale c) glissante

2) Soit ABC un triangle équilatéral direct et f est un antidéplacement tel que $f(A) = B$ et $f(B) = C$ alors $f \, o \, f$ est :

a) une translation b) une symétrie glissante c) l'identité du plan

3) Soit f l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \overline{z} - i$ alors f est une :

a) symétrie centrale b) symétrie axiale c) symétrie glissante

Exercice 2 (4 points)

Ci-dessous, on représenté dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe **($\mathcal{C}$)** de la fonction définie sur $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ par $f(x) = (\ln x)^3 - 3\ln x$ et les demi- tangentes à la courbe $(\mathcal{C})$ aux points d'abscisses respectives $\frac{1}{e}$ et e.

1) a) En utilisant le graphique, justifier que f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}, e\right]$ sur $[-2, 2]$.

b) Tracer dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe $(\mathcal{C}')$ de la fonction f^{-1} réciproque de f , on précisera ses demi- tangentes aux points d'abscisses -2 et 2

2) Soit la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ définie par $a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx$

a) Calculer a_1

b) Montrer, à l'aide d'une intégration par parties, que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$;

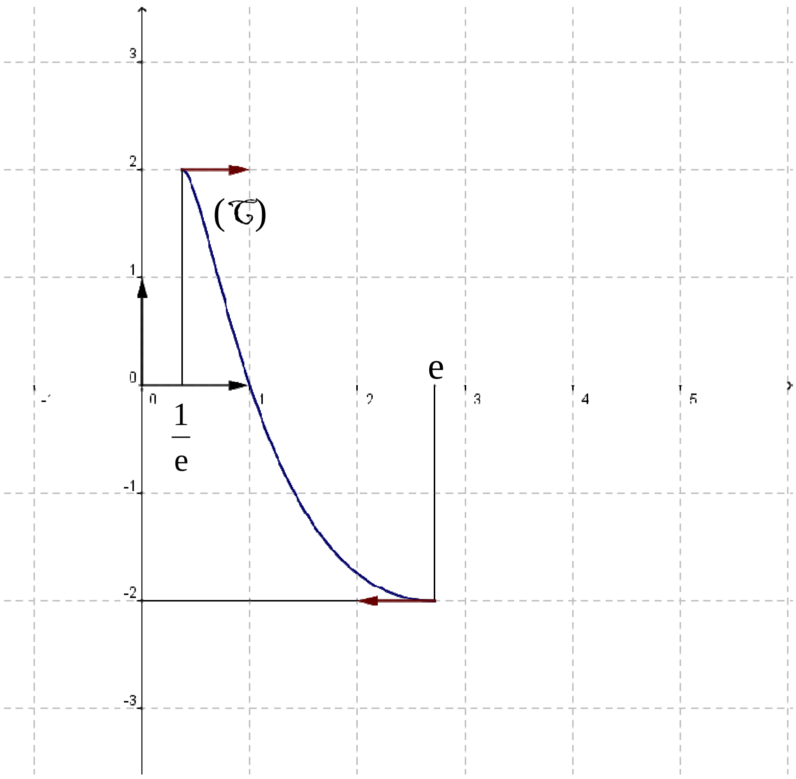
$$a_{n+1} = e - (n+1)a_n$$

c) En déduire que $a_3 = 6 - 2e$

3) Soit $\mathscr{A}$ la mesure de l'aire de la partie du plan limité par la courbe $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 0$ et $y = e$

a) Calculer $\int_1^e f(x)dx$

b) En déduire $\mathscr{A}$



Exercice 3 (4 points)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$. On désigne par $\mathscr{H}$ l'ensemble des points du plan M d'affixe z tel que : $z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2$

1) a) Montrer que $\mathscr{H}$ a pour équation : $x^2 - y^2 = 4$

b) En déduire que $\mathscr{H}$ est une hyperbole dont on précisera, son centre, ses foyers, ses sommets, ses directrice, ses asymptotes et son excentricité.

2) On désigne par $\mathscr{H}'$ l'image de $\mathscr{H}$ par la rotation R de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$

a) Déterminer les expressions analytiques de la rotation.

b) Montrer que $\mathscr{H}'$ a pour équation $x'y' = -2$

c) En déduire la nature de la courbe $\mathscr{H}'$.

3) Tracer dans le même repère $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les courbes $\mathscr{H}$ et $\mathscr{H}'$.

Exercice 4 (4 points)

Soit n un entier naturel supérieur ou égale à 2.

1) a) Montrer que n et $2n+1$ sont premier entre eux.

   b) En déduire que : si d est un diviseur de $2n+1$ alors n et d sont premier entre eux.

2) On pose $\alpha = n+3$; $\beta = 2n+1$ et $d_1 = \alpha \wedge \beta$.

   a) Calculer $2\alpha - \beta$, en déduire les valeurs possibles de d_1.

   b) Démontrer que α et β sont multiples de 5 ssi $(n-2)$ est un multiple de 5.

3) On considère les entiers naturels a et b définies par :

$$a = n^3 + 2n^2 - 3n \qquad \text{et} \qquad b = 2n^2 - n - 1$$

Factoriser a et b, en déduire que a et b sont divisibles par $(n-1)$.

4) On pose $d_2 = n(n+3) \wedge (2n+1)$ et $\delta = a \wedge b$

   a) Montrer que $d_1 = d_2$ (on pourra montrer que d_1 divise d_2 et d_2 divise d_1).

   b) En déduire δ en fonction de d_1 et n.

   c) Application : Déterminer δ pour $n = 2002$.

   Déterminer δ pour $n = 2010$.

Exercice 5 (4 points)

A/ Dans le tableau statistique suivant on donne les notes obtenus par un élève de terminal en mathématiques et en physiques durant l'année scolaire.

Notes en mathématiques (X)	5	7	9	11	12	14
Notes en physiques(Y)	8	7	10	12	11	13

1) a) Calculer le coefficient de corrélation entre X et Y . Que peut on conclure ?

   b) Déterminer une équation de la droite de régression de Y en X.

   c) Quelle sera la note prévu de cet élève en physiques s'il estime avoir la note 15,5 en mathématiques à l'examen du bac ?

2) Dans la suite on place ces 12 devoirs dans un classeur puis on tire au hasard simultanément deux devoirs. quelle est la probabilité de :

a) Obtenir deux devoirs de même matière.

b) Obtenir deux devoirs dont la note de chacun est supérieure ou égale à 10.

c) Obtenir deux devoirs dont la note de chacun est supérieure ou égale à 10 sachant qu'ils sont de même matière.

B/ Une usine de confection fabriquant des robes possède trois machines A, B et C qui fournissent respectivement 10% ; 40% et 50% de sa production totale. Une étude a montrée que le pourcentage de la marchandise défectueuse est $3{,}5\%$ pour la machine A $1{,}5\%$ pour la machine B et $2{,}2\%$ pour la machine C. Après fabrication les robes seront versées dans une caisse commune. On choisit une robe au hasard de la caisse.

1) On considère les événements suivants :

A : « la robe choisie provient de la machine A »

B : « la robe choisie provient de la machine B »

C : « la robe choisie provient de la machine C »

D : « la robe choisie est défectueuse »

Représenter la situation par un arbre pondéré.

2) Quelle est la probabilité pour que :

a) la robe provienne de la machine C et soit défectueuse.

b) la robe est défectueuse.

c) la robe provienne de la machine C sachant qu'elle est défectueuse.

UNE CORRECTION POSSIBLE

Proposée par Kooli Mohamed Hechmi

Exercice 1

1) Une symétrie centrale est une rotation d'angle π. La composée d'une rotation d'angle π et d'une translation est une rotation d'angle π. Donc **b)**

2) On a f est un antidéplacement alors $f\ o\ f$ est un déplacement et $(f\ o\ f)(A) = C \neq A$

Donc **a)**

3) **b)**

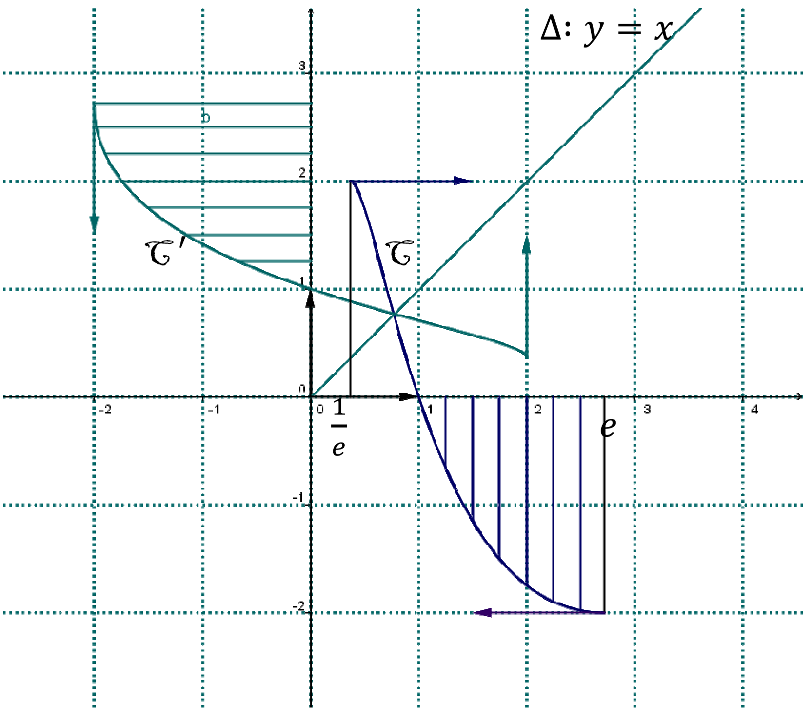
Exercice 2

1) **a)** On a f est continue et strictement décroissante sur $\left[\frac{1}{e}\ ,\ e\right]$, alors f réalise une bijection de $\left[\frac{1}{e}\ ,\ e\right]$ sur $f\left(\left[\frac{1}{e}\ ,\ e\right]\right) = \left[\mathrm{f(e)}, \mathrm{f}\left(\frac{1}{e}\right)\right] = [-2\ , 2]\Big)$.

b) On a $\mathcal{C}' = S_{\Delta}(\mathcal{C})$ avec $\Delta\colon y = x$

La courbe $\mathcal{C}$ admet au point d'abscisse $\frac{1}{e}$ une demi tangente horizontale alors la courbe $\mathcal{C}'$ admet au point d'abscisse $f\left(\frac{1}{e}\right) = 2$ une demi tangente verticale.

La courbe $\mathcal{C}$ admet au point d'abscisse e une demi tangente horizontale alors la courbe $\mathcal{C}'$ admet au point d'abscisse $f(e) = -2$ une demi tangente verticale.



2) a) $a_n = \int_1^e (\ln x)^n \, dx \ ; n \geq 1$

$a_1 = \int_1^e \ln x \ dx = [x ln\, x - x]_1^e = elne - e - (ln1 - 1) = 1$

b) $a_{n+1} = \int_1^e (\ln x)^{n+1} \, dx$

On pose $\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{n+1} \\ v'(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u'^{(x)} = (n+1)\frac{1}{x}(\ln x)^n \\ v(x) = x \end{cases}$

alors $a_{n+1} = [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - \int_1^e (n+1)(\ln x)^n \, dx$

$= [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1)\int_1^e (\ln x)^n \, dx$

$= [x(\ln x)^{n+1}]_1^e - (n+1)a_n$

$= e(\ln e)^{n+1} - 1ln1 - (n+1)a_n$

$= e - (n+1)a_n$

c) On a : $a_2 = e - (1+1)a_1 = e - 2$

alors $a_3 = e - (2+1)a_2 = e - 3a_2 = e - 3(e-2) = e - 3e + 6 = 6 - 2e$

3) a) $\int_1^e f(x)dx = \int_1^e ((\ln x)^3 - 3lnx) \, dx = \int_1^e (\ln x)^3 \, dx - \int_1^e 3lnx \, dx$

$= \int_1^e (\ln x)^3 \, dx - 3\int_1^e lnx \, dx$

$= a_3 - 3a_1 = 6 - 2e - 3$

$= 3 - 2e$

b) Pour raison de symétrie l'aire de la partie du plan limité par la courbe $(\mathcal{C}')$ et les droites d'équations $x = 0$ et $y = e$ est égale à l'aire de la partie du plan limité par la courbe $(\mathcal{C})$ l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$

donc $\mathscr{A} = \int_1^e |f(x)| dx = \int_1^e -f(x)dx$ $\left(\text{car pour tout } x \in \left[\frac{1}{e}, e\right] \ ; \ f(x) < 0\right)$

$= -\int_1^e f(x)dx = -(3 - 2e) = 2e - 3 \ uA$

Exercice 3

1) a) On pose $z = x + yi$ où x et y sont deux réels.

$M(z) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow z^2 - 4 = 4 - \bar{z}^2 \Leftrightarrow (x+yi)^2 - 4 = 4 - (x-yi)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 - 4 = 4 - x^2 + 2xyi + y^2$

$\Leftrightarrow 2x^2 - 2y^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 4$

Donc $\mathcal{H}$ a pour équation : $x^2 - y^2 = 4$

b) On a $\mathcal{H} : x^2 - y^2 = 4 \Leftrightarrow \mathcal{H} : \frac{x^2}{2^2} - \frac{y^2}{2^2} = 1$ donc $\mathcal{H}$ est une hyperbole de centre O de foyers $F_1(2\sqrt{2}, 0)$ et $F_2(-2\sqrt{2}, 0)$ de sommets $S_1(2, 0)$ et $S_2(-2, 0)$ et d'asymptotes $\Delta_1 : y = x$ et $\Delta_2 : y = -x$ et d' excentricité $e = \sqrt{2}$

2) a) On a R la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{4}$ alors $R : z \mapsto z' = e^{-i\frac{\pi}{4}}z$

donc $x' + y'i = e^{-i\frac{\pi}{4}}(x+yi) \Leftrightarrow x' + y'i = \left(\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)(x+yi)$

$\Leftrightarrow x' + y'i = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{yi\sqrt{2}}{2} - \frac{xi\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x' + y'i = \left(\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2}\right) + i\left(\frac{y\sqrt{2}}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x' = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2} \\ y' = \frac{y\sqrt{2}}{2} - \frac{x\sqrt{2}}{2} \end{cases}$$

b) On a $\begin{cases} x' = \frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2} \\ y' = -\frac{x\sqrt{2}}{2} + \frac{y\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \\ 2y' = -x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x' = x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \\ 2y' = -x\sqrt{2} + y\sqrt{2} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\sqrt{2} = x' - y' \\ y\sqrt{2} = x' + y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x'-y'}{\sqrt{2}} \\ y = \frac{x'+y'}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

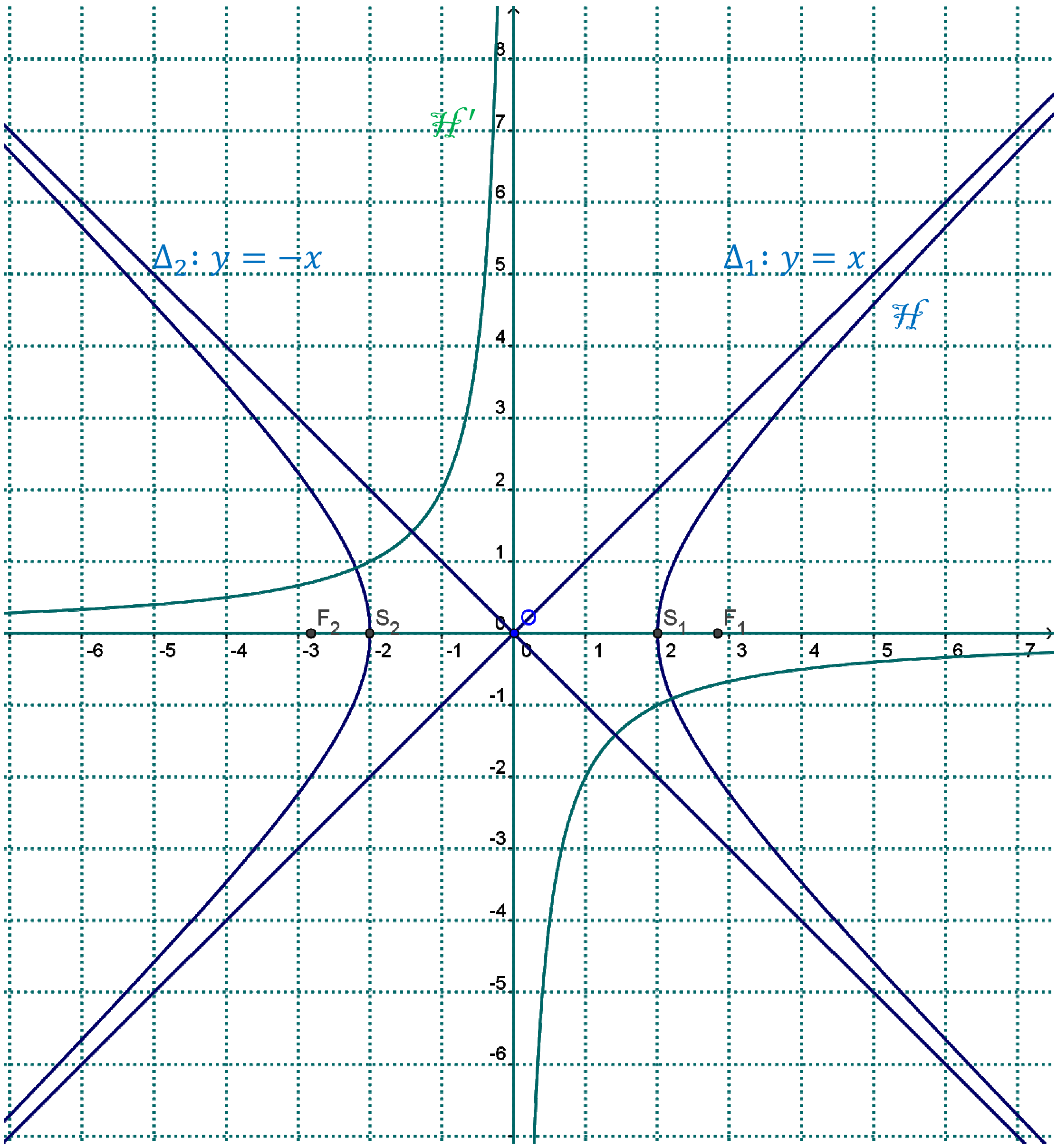
$M(x, y) \in \mathcal{H} \Leftrightarrow M'(x', y') \in \mathcal{H}'$

$$\frac{\left(\frac{x'-y'}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} - \frac{\left(\frac{x'+y'}{\sqrt{2}}\right)^2}{4} = 1 \Leftrightarrow \frac{(x')^2 - 2x'y' + (y')^2}{8} - \frac{(x')^2 + 2x'y' + (y')^2}{8} = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{-4x'y'}{8} = 1 \Leftrightarrow x'y' = -2$$

c) On a $\mathcal{H}' : x'y' = -2$ alors $\mathcal{H}'$ est une hyperbole.

3) Tracer dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$.



Exercice 4

1) a) Soit d un diviseur commun à $2n+1$ et n alors d divise $2n+1$ et d divise n donc d divise $2n+1$ et d divise $2n$ donc d divise $2n+1-2n=1$ d'où $d=1$

alors n et $2n+1$ sont premier entre eux.

b) d est un diviseur de $2n+1$ alors il existe un entier k tel que $2n+1=kd$ donc $kd-2n=1$ donc n et d sont premiers entre eux. (théorème de Bézout).

2) a) $\alpha = n + 3$; $\beta = 2n + 1$ et $d_1 = \alpha \wedge \beta$.

$2\alpha - \beta = 2n + 6 - 2n - 1 = 5$

d_1 divise α et d_1 divise β donc d_1 divise $2\alpha - \beta = 5$ comme les diviseurs de 5 sont 1 et 5 alors $d_1 = 1$ ou $d_1 = 5$

b) On a α et β sont multiples de 5 donc $\alpha \equiv 0\ (mod\ 5)$ et $\beta \equiv 0\ (mod\ 5)$

donc $\beta - \alpha \equiv 0\ (mod\ 5)$ donc $2n + 1 - n - 3 \equiv 0\ (mod\ 5)$ alors $n - 2 \equiv 0\ (mod\ 5)$

donc $n - 2$ est un multiple de 5

Réciproquement : $n - 2$ est un multiple de 5 donc $n - 2 \equiv 0\ (mod\ 5)$

donc $n - 2 + 5 \equiv 0\ (mod\ 5)$ donc $n + 3 \equiv 0\ (mod\ 5)$ donc $\alpha \equiv 0\ (mod\ 5)$

d'autre part $n - 2 \equiv 0\ (mod\ 5)$ donc $2(n - 2) \equiv 0\ (mod\ 5)$ donc $2n - 4 \equiv 0\ (mod\ 5)$

donc $2n - 4 + 5 \equiv 0\ (mod\ 5)$ donc $2n + 1 \equiv 0\ (mod\ 5)$ donc $\beta \equiv 0\ (mod\ 5)$

Conclusion α et β sont multiples de 5 $\Leftrightarrow$ $(n - 2)$ est un multiple de 5.

3) $a = n^3 + 2n^2 - 3n = n(n^2 + 2n - 3) = n(n - 1)(n + 3)$

$b = 2n^2 - n - 1 = (n - 1)(2n + 1)$

On a : $a = n(n - 1)(n + 3)$ alors a est divisible par $(n - 1)$

et on a : $b = (n - 1)(2n + 1)$ alors b est divisible par $(n - 1)$

4) a) On a : $d_2 = n(n + 3) \wedge (2n + 1)$

et on a : $d_1 = \alpha \wedge \beta$ donc d_1 divise α et d_1 divise β donc d_1 divise $n\alpha$ et d_1 divise β

d_1 divise $n(n + 3)$ et d_1 divise $(2n + 1)$ donc d_1 divise $n(n + 3) \wedge (2n + 1)$ et on a

$d_2 = n(n + 3) \wedge (2n + 1)$ **donc $\boldsymbol{d_1}$ divise $\boldsymbol{d_2}$**

et on a : $d_2 = n(n + 3) \wedge (2n + 1)$ donc d_2 divise $n(n + 3)$ et d_2 divise $(2n + 1) = \beta$

donc d_2 divise $2n(n + 3)$ et d_2 divise $(2n + 1)(n + 3)$

donc d_2 divise $(2n + 1)(n + 3) - 2n(n + 3) = n + 3$ donc d_2 divise $n + 3$

donc d_2 divise α on a donc d_2 divise α et d_2 divise β donc d_2 divise $\alpha \wedge \beta = d_1$

donc $\boldsymbol{d_2}$ divise $\boldsymbol{d_1}$

on a d_1 divise d_2 et d_2 divise d_1 **donc $\boldsymbol{d_1 = d_2}$**

b) On a $\delta = a \wedge b$ donc $\delta = n(n - 1)(n + 3) \wedge (n - 1)(2n + 1)$

donc $\delta = (n - 1)[n(n + 3) \wedge (2n + 1)]$ donc $\delta = (n - 1)d_1$

c) On d'après **2) a)** α et β sont multiples de 5 ssi $(n-2)$ est un multiple de 5 donc $d_1 = 5$

pour $n = 2002$ on a $n - 2 = 2000$ divisible par 5 donc $d_1 = 5$

donc $\boldsymbol{\delta = (2002 - 1) \times 5 = 10005}$

pour $n = 2010$ on a $n - 2 = 2008$ n'est pas divisible par 5 donc $d_1 = 1$

donc $\boldsymbol{\delta = (2010 - 1) \times 1 = 2009}$

Exercice 5

A/

1) a)

Notes en mathématiques (X)	5	7	9	11	12	14
Notes en physiques(Y)	8	7	10	12	11	13

On enregistre les données de l'exercice dans la calculatrice et on obtient facilement les résultats suivants

$$\overline{X} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i = 9{,}666 \qquad \overline{Y} = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} y_i = 10{,}166$$

$$cov(X\,,Y) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} x_i y_i - \overline{X}\,\overline{Y} = 5{,}888$$

$$V(X) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} {x_i}^2 - \overline{X}^2 = 9{,}222 \qquad V(Y) = \frac{1}{6}\sum_{i=1}^{6} {y_i}^2 - \overline{Y}^2 = 4{,}472$$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 3{,}036 \qquad \sigma(Y) = \sqrt{V(Y)} = 2{,}114$$

$$r = \frac{cov(X\,,Y)}{\sigma(X)\sigma(Y)} = 0{,}916$$

On a $-1 < r < 1$ donc il y a une forte corrélation entre X et Y et un ajustement affine est justifié.

2) **a)** Soit A l'événement « obtenir deux devoirs de la même matière » donc l'épreuve consiste à tirer simultanément deux devoirs de mathématiques parmi 6 devoirs ou deux devoirs de physiques parmi 6 devoirs donc $p(A) = \frac{C_6^2+C_6^2}{C_{12}^2} = \frac{5}{22}$

b) Soit B l'événement « obtenir deux devoirs dont la note de chacun est supérieure ou égale à 10 » donc l'épreuve consiste à tirer simultanément deux devoirs parmi 7 devoirs dont les notes sont supérieures ou égale à 10 (car il y a 3 devoirs de mathématiques et 4 devoirs de physiques dont les notes sont supérieures ou égale à 10)

donc $p(B) = \frac{C_7^2}{C_{12}^2} = \frac{7}{22}$

c) Soit C l'événement « obtenir deux devoirs dont la note de chacun est supérieure ou égale à 10 sachant qu'ils sont de même matière »

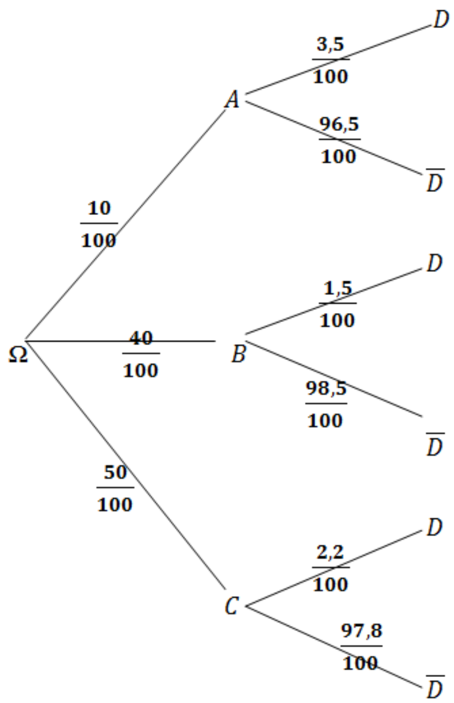
donc $p(C) = p(B/A) = \frac{p(B\cap A)}{p(A)}$

or $B \cap A$: « obtenir deux devoirs de mathématiques parmi les trois dont la note est supérieure ou égale à 10 ou obtenir deux devoirs de physiques parmi les quatre dont la note est supérieure ou égale à 10 »

donc $p(B \cap A) = \frac{C_3^2+C_4^2}{C_{12}^2} = \frac{3}{22}$ donc $p(C) = p(B/A) = \frac{\frac{3}{22}}{\frac{5}{22}} = \frac{3}{5}$

B/

1)



2) a) $p = p(C \cap D) = \frac{50}{100} \times \frac{2{,}2}{100} = \frac{5\times2\times11}{10000} = \frac{11}{1000}$

b) $p = p(D) = p(A)p(D/A) + p(B)p(D/B) + p(C)p(D/C)$

$$= \frac{10}{100} \times \frac{3{,}5}{100} + \frac{40}{100} \times \frac{1{,}5}{100} + \frac{50}{100} \times \frac{2{,}2}{100}$$

$$= \frac{35}{10000} + \frac{60}{10000} + \frac{110}{10000} = \frac{205}{10000} = \frac{41}{2000}$$

c) $p = p(C/D) = \frac{p(C\cap D)}{p(D)} = \frac{\frac{11}{1000}}{\frac{41}{2000}} = \frac{11}{1000} \times \frac{2000}{41} = \frac{22}{41}$