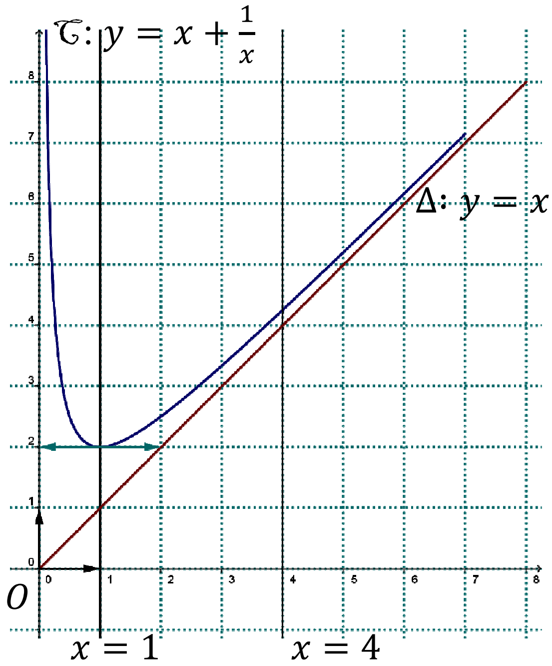
Exercice 1 (6 points)

1) Calculer chacune des intégrales suivantes :

$\int_0^1 x\, e^{1+x^2}\, dx$, $\int_0^{\frac{\pi}{3}} \tan x\, dx$; $\int_1^e \frac{\ln x}{x}\, dx$; $\int_1^e x \ln x\, dx$

2) a) On considère la courbe $\mathcal{C}$ suivante :

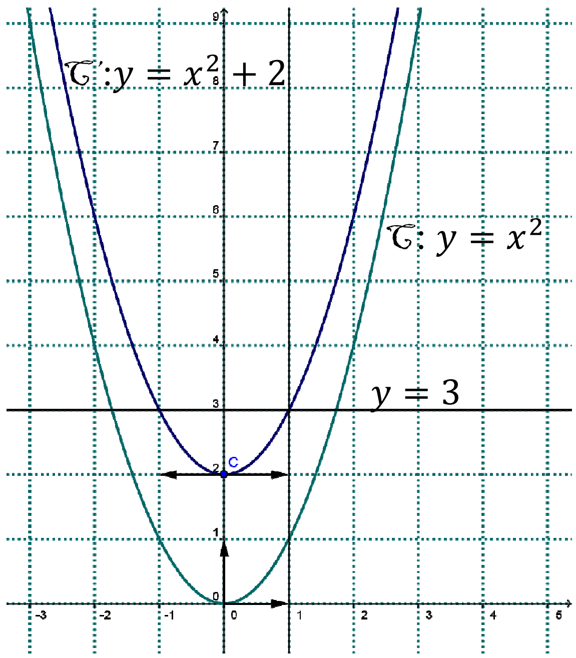
Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par la courbe $\mathcal{C}$ la droite Δ et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 4$.



la droite Δ et les droites d'équations : $x = 1$ et $x = 4$.

b) On considère les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ suivantes :

Calculer l'aire du domaine $\mathcal{D}$ limité par les courbes $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ et la droite $\Delta: y = 3$.



Exercice 2 (7 points)

A/ Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}_+$ par $g(x) = \frac{2x^2}{1+x^2} - \ln(1+x^2)$.

1) Etudier les variations de g.

2) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α telle que $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

3) En déduire le signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}_+$.

B/ Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $\begin{cases} f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{x} & si\ x \neq 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$

1) a) Montrer que f est continue en 0.

   b) Montrer que f est dérivable en 0 et préciser $f'(0)$.

   c) Montrer que la fonction f est impaire.

2) a) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$.

   b) Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}_+^* \ ; f'x) = \frac{g(x)}{x^2}$.

   c) Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}_+$.

   d) Tracer la courbe $\mathcal{C}$ de f ; on précisera sa tangente au point d'abscisse 0.

Exercice 3 (7 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct, on considère un triangle OAB tel que : $OA = OB$ et $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$. On désigne par I le milieu du segment $[AB]$ et par C et D les symétriques du point I respectivement par rapport à O et à B. Soit f la similitude directe qui envoie A sur D et O sur C

1) Montrer que f est de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2) a) Montrer que O est l'orthocentre du triangle ACD.

   b) Soit J le projeté orthogonal du point O sur (AC). Déterminer les images des droites (OJ) et (AJ) par f. En déduire que J est le centre de la similitude f.

3) Soit g la similitude indirecte de centre I, qui envoie A sur D.

   a) Vérifier que g est de rapport 2 et d'axe (IC). En déduire que $g(O) = C$ g(O) .

   b) Déterminer $(g \text{ o } f^{-1})(C)$ et $(g \text{ o } f^{-1})(D)$. Caractériser alors l'application $g \text{ o } f^{-1}$

4) On pose $I' = f(I)$ et $J' = g(J)$.

   a) Déterminer $(g \text{ o } f^{-1})(J)$ et $(g \text{ o } f^{-1})(I')$.

   b) En déduire que les droites (IJ), $(I'J')$ et (CD) sont concourantes.