Lycée Hamouda Pacha La manouba ◈◈◈ MINISTERE DE L'EDUCATION	Devoir de synthèse n° 2		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 4 h	Coefficient : 4
SECTION : Mathématiques		Pr : Ben Fredj S.	

N.B

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. (3 points) Répondre par vraie ou faux,en justifiant la réponse.

1. L'équation $21x \equiv 7 \pmod{33}$ admet au moins une solution dans $\mathbb{Z}$.
2. Si p est premier et si $p > 3$ alors $p^2 \equiv 1 \pmod 4$.
3. $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ si et seulement si, $a \equiv 1 \pmod 3$ ou $a \equiv 2 \pmod 3$.

Exercice 2. (4 points) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{u}, \vec{v})$. Soit S l'application du plan dans lui même qui à tout point M d'affixe z associe le points M′ d'affixe z' tel que $z' = -i\bar{z} + 1 - i$.

1. Soit A le point d'affixe $-1 + i$ et soit T la translation de vecteur $\overrightarrow{OA}$.
   N, N_1 et N' sont les points du plan d'affixes respectives z, z_1 et z'.
   (a) Montrer que $T(N) = N_1$ si et seulement si, $z_1 = z - 1 + i$.
   (b) Soit $S' = S \circ T$. Montrer que :
   $$S'(N) = N' \text{ si et seulement si, } z' = -i\bar{z}.$$
   (c) Déduire de S' est la symétrie orthogonale d'axe la droite (OA).
   (d) Montrer que S est une symétrie glissante dont-on précisera la forme réduite.
2. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport 2.
   Donner la nature et les éléments caractéristiques de la transformation $S \circ h \circ S$.

Exercice 3. (5 points) Soient A et I deux points du plan et soit R la rotation de centre I et d'angle $-\frac{\pi}{3}$. On pose $O = R(A)$ et $B = R(O)$.

1. (a) Construire les points O et B.
   (b) Montrer que le quadrilatère IBOA est un losange
2. Soit (Γ) le cercle de centre O et de rayon OI. Soit M un point de ce cercle et M' son image par la rotation R.

   Montrer que lorsque le point M décrit le cercle (Γ), son image M' décrit un cercle $(\Gamma)'$ qu'on précisera et qu'on construira.
3. Soit C et D les symétriques respectifs de I par rapport à O et B. Soit σ la similitude indirecte telle que $\sigma(C) = O$ et $\sigma(D) = B$.
   (a) Déterminer le rapport de σ. En déduire que σ possède un seul point invariant qu'on notera J.
   (b) On note Δ l'axe de σ et par E le point d'intersection des droite Δ et (OC).
   Soit E' l'image de E par σ. Montrer que $\overrightarrow{JE'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JE}$.
   (c) Montrer que $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{JE}}) \pmod{2\pi}$. En déduire que les droites Δ et (CD) sont parallèles.
   (d) Soit C' le symétrique de point C par rapport à la droite Δ.
   Montrer que E est le centre de gravité du triangle JCC' et en déduire que $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EO}$.
   (e) Construire alors le point E, l'axe Δ et le centre J de la similitude σ.

Exercice 4. (8 points) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par :
$f(x) = x + e^{-x}$. On donne dans la figure jointe (Voir annexe) la courbe (C) représentative de f.

1. A l'aide d'une lecture graphique donner :
   (a) Le tableau de variation de f.
   (b) Le signe de $f(x)$ pour $x \geq 0$.
2. Vérifier que pour tout entier $k > 0$,

$$\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k} \text{ puis que } \ell n\,(1+k) \leq \ell n\, k + \frac{1}{k}$$

3. On considère la suite (U_n) la suite définie par :

$$U_1 = 0 \text{ et pour tout } n \geq 1 \quad U_{n+1} = f(U_n).$$

   (a) Placer sur le graphique les termes U_2 et U_3.

   (b) Montrer par récurrence que pour tout $n \geq 1$,

   $$U_n \geq \ell n\,(n) \text{ puis calculer } \lim_{n \to +\infty} U_n.$$

   (c) On admet que pour tout $n \geq 2$,

   $$U_n \leq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n-1}.$$

   Démontrer que que pour tout $n \geq 2$, $\quad U_n \leq 1 + \ell n\,(n-1)$.

   (d) Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} \frac{U_n}{\ell n\,(n)}$.

4. Pour tout $n \geq 1$, on considère les points A_n et B_n de coordonnées (U_n, U_{n+1}) et (U_n, U_n) et on note $\mathscr{A}_n$ l'aire du triangle $B_nA_nB_{n+1}$ et pour tout $n \geq 2$, on pose :

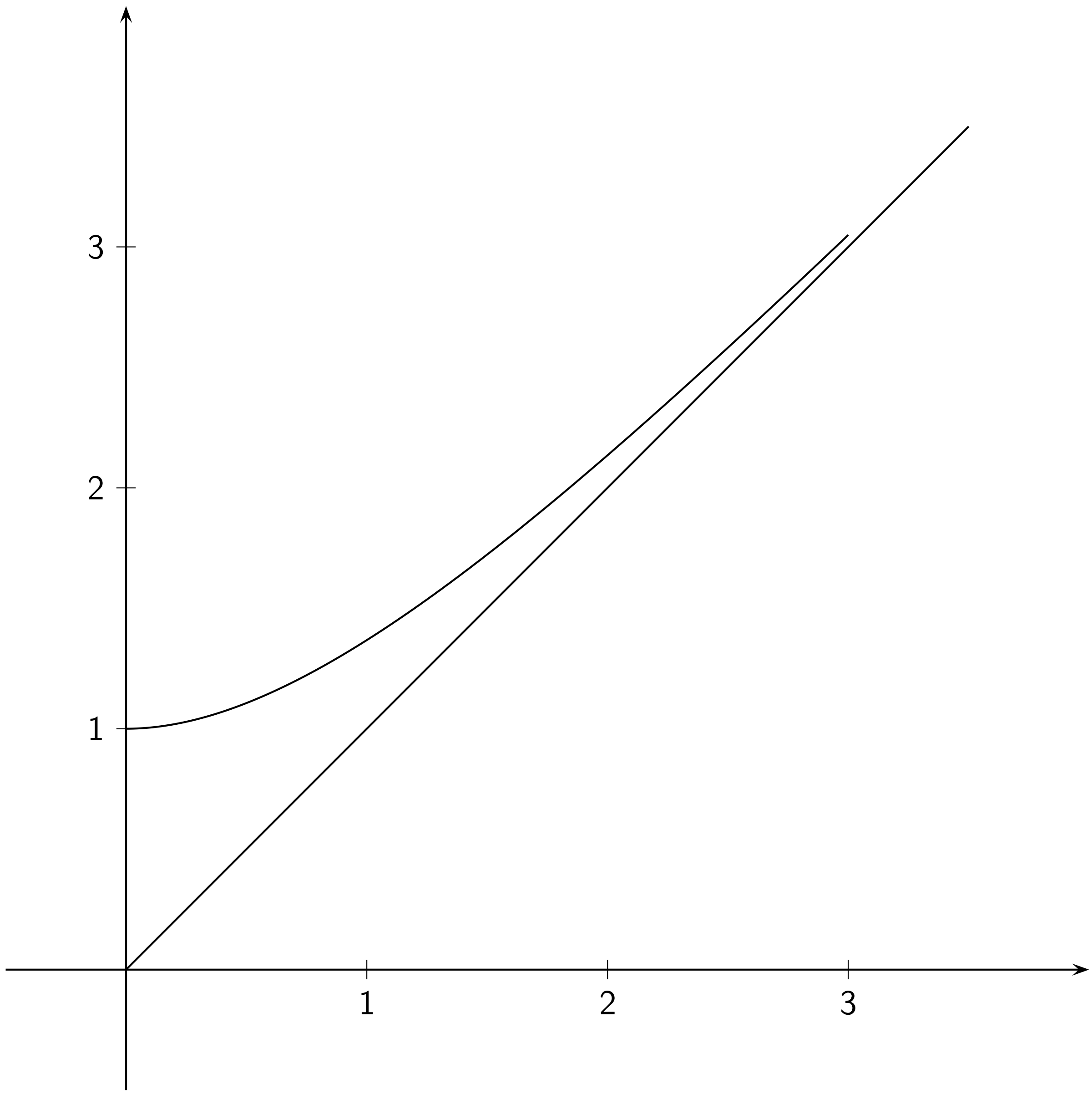
$$s_n = \sum_{k=1}^{n-1} \mathscr{A}_k.$$

   (a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\quad s_n \leq 1 - e^{-U_n}$.

   (b) Montrer que la suite (s_n) est convergente puis donner un encadrement de sa limite.

FEUILLE ANNEXE

Nom : ....
Prénom : ....



CORRECTION

Solution 1. .

1. $\boxed{\text{Faux}}$ On procède par l'absurde.

   On suppose qu'il existe un entier x tel que $21x \equiv 7 \pmod{33}$, alors il existe un entier k tel que $21x = 7 + 33k$.

   Comme 3 divise $21k - 33k$ alors 3 divise 7. Absurde.

Barème :	0.5 pt	0.5 pt

2. $\boxed{\text{Vrai}}$ p est premier est impair (car $p > 3$) alors $p \equiv 1 \pmod 4$ où $p \equiv 3 \pmod 4$ alors $p^2 \equiv 1 \pmod 4$ où $p \equiv 9 \pmod 4$ alors $p^2 \equiv 1 \pmod 4$.

Barème :	0.5 pt	0.5 pt

3. $\boxed{\text{Vrai}}$

   - C.N. Si $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ alors 3 divise $a^2 - 1$ alors 3 divise $(a-1)(a+1)$ et comme 3 est premier alors 3 divise $a - 1$ ou 3 divise $a + 1$ alors $a \equiv 1 \pmod 3$ ou $a \equiv -1 \pmod 3$ alors $a \equiv 1 \pmod 3$ ou $a \equiv 2 \pmod 3$.
   - C.S. Si $a \equiv 1 \pmod 3$ ou $a \equiv 2 \pmod 3$ alors $a^2 \equiv 1 \pmod 3$ ou $a^2 \equiv 4 \pmod 3$ alors $a^2 \equiv 1 \pmod 3$.

Barème :	0.5 pt	0.5 pt

Solution 2. .

1. (a) $T(N) = N_1$ équivaut à $\overrightarrow{NN_1} = \overrightarrow{OA}$ équivaut à $z_1 - z = -1 + i$ équivaut à $z_1 = z - 1 + i$.

Barème :	1 pt

   (b)

$$\begin{aligned} S'(N) = N' &\iff S(T(N)) = N' \\ &\iff S(N_1) = N' \\ &\iff z' = -i\overline{\left(z - 1 + i\right)} + 1 - i \\ &\iff z' = -i\left(\bar{z} - 1 - i\right) + 1 - i = -i\bar{z} - 1 + i + 1 - i = -i\bar{z} \end{aligned}$$

Barème :	1.5 pt

(c) La forme complexe de S' permet de conclure que S' est une similitude indirecte de rapport $k = |-i| = 1$ alors S est un antidéplacement.
Par ailleurs :

- $-i\overline{z_O} = 0 = z_O$ donc $S(O) = O$.
- $-i\overline{z_A} = -i(-1-i) = -1+i$ donc $S(A)$

alors S est la symétrie orthogonale d'axe la droite (OA).

Barème : $\boxed{1 \text{ pt}}$

(d) Nous avons $S \circ t_{\overrightarrow{OA}} = S_{(OA)}$ alors $S = S_{(OA)} \circ t_{\overrightarrow{AO}}$ donc S est une symétrie glissante de vecteur $\overrightarrow{AO}$ et d'axe (OA).

Barème : $\boxed{1 \text{ pt}}$

2. Cherchons la forme complexe de la transformation $S'' = S \circ h \circ S$.
M et M' deux points d'affixes respectives z et z'.
$S''(M) = M' \iff z' = -i\overline{\left(2\left(-2i\overline{z}+1-i\right)\right)} + 1 - i = 2z + 3 - 3i$
alors S'' est une homothétie de rapport 2 et de centre Ω telle que $z_\Omega = \dfrac{3-3i}{1-2} = -3+3i$

Barème : $\boxed{0.5 \text{ pt}}$

Solution 3. .

1. (a) Voir Figure. **Barème** : $\boxed{0.25+0.25 \text{ pt}}$

(b) $R(A) = O$ alors $IA = IO$ et $\widehat{AOI} = \frac{\pi}{3}$ alors IOA est un triangle équilatéral d'où $IA = OA$ (1).
Comme $R \circ R(I) = I$, $R \circ R(A) = B$ alors $IA = IB$ (2).
(1) et (2) permettent de conclure que IBOA est un losange.

Barème : $\boxed{0.5 \text{ pt}}$

2. $M' = R(M)$ et M appartient au cercle (Γ) de centre O et de rayon OI alors M' appartient à l'image de (Γ) par R, c'est le cercle noté (Γ') de centre $R(O) = B$ et de rayon OI alors (Γ') est le cercle de centre B et passant par O.

Barème : $\boxed{1 \text{ pt}}$

3. (a) Le rapport de σ est $\dfrac{OB}{CD} = \dfrac{\frac{1}{2}CD}{CD} = \dfrac{1}{2}$. σ est une similitude indirecte de rapport différent de 1 alors elle possède un seul point invariant. Soit $J = \sigma(J)$.

Barème : $\boxed{0.5+0.5 \text{ pt}}$

(b) Δ l'axe de σ et $E \in \Delta \cap (OC)$. La forme réduite de σ est : $\sigma = S_\Delta \circ h = h \circ S_\Delta$ où h est l'homothétie de centre J et de rapport $\frac{1}{2}$.

Alors $\sigma(E) = E'$ équivaut à $h \circ S_\Delta(E) = E'$ alors $h(E) = E'$ puisque $E \in \Delta$ donc $\overrightarrow{JE'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JE}$.

Barème : $\boxed{0.25 \text{ pt}}$

(c) La similitude indirecte oppose les mesures des angles orientés alors :

$(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{JE'}})(\textbf{mod } 2\pi)$ et d'après l'égalité vectorielle précédente alors

$$(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{JE}})(\textbf{mod } 2\pi).$$

Comme $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{JE}})(\textbf{mod } 2\pi)$ alors

$(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CD}}) - (\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}})(\textbf{mod } 2\pi)$ alors $2(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}) \equiv -(\widehat{\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{CD}})(\textbf{mod } 2\pi)$

et (OB) et (CD) sont parallèles alors $(\widehat{\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{JE}}) \equiv 0(\textbf{mod } \pi)$ donc (CD) et (JE) sont parallèles. (A savoir que E et J appartiennent à Δ.)

Barème : $\boxed{0.25+0.25 \text{ pt}}$

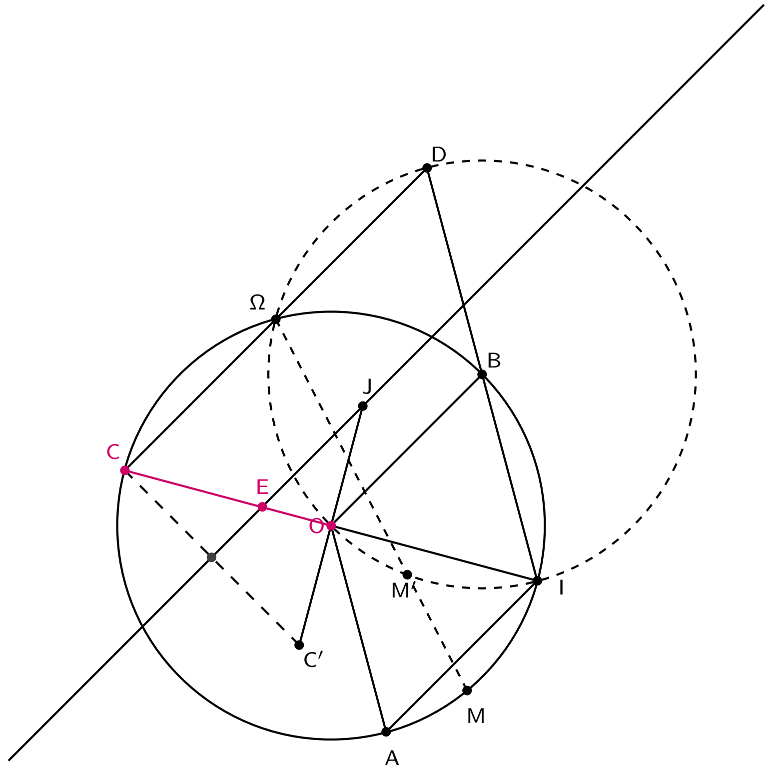
(d) On a $\sigma(C) = O$ signifie $h \circ S_\Delta(C) = O$ alors $h(C') = O$ alors $\overrightarrow{JO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{JC}$ alors O est le milieu de $[JC']$.

(JE) passe par le milieu de $[CC']$ et (EC) passe par le milieu O de $[JC']$ alors E est le centre de gravité du triangle JCC' et par conséquent $\overrightarrow{EC} = -2\overrightarrow{EO}$.

Barème : $\boxed{0.25+0.25 \text{ pt}}$

(e)
i. E est le barycentre des points pondérés $(C;1)$ et $(O;2)$ soit $\overrightarrow{CE} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CO}$.
ii. Δ est la parallèle à (CD) passant par E.
iii. Soit $C' = S_\Delta(C)$, alors $(C'O)$ coupe Δ en J.

Barème : $\boxed{0.25+0.25+0.25 \text{ pt}}$



Solution 4. .

1. (a) .

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	
$f(x)$	$1 \nearrow$	$+\infty$

   (b) Pour tout réel $x \geq 0$, $f(x) > 0$.

Barème : $\boxed{0.5+0.5 \text{ pt}}$

2. $t \in [k, k+1]$ et $k > 0$ alors $t \geq k > 0$ d'où $\dfrac{1}{t} \leq \dfrac{1}{k}$

   (La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ est continue sur $[k, k+1]$, puisque $[k, k+1] \subset]0, +\infty[$) donc $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \leq \frac{1}{k}$.

   Comme $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} = \Big[\ell n\,(t)\Big]_k^{k+1} = \ell n\,(k+1) - \ell n\,(k)$ alors $\ell n\,(k+1) \leq \ell n\,(k) + \dfrac{1}{k}$.

Barème : $\boxed{0.5+0.5 \text{ pt}}$

3. (a) Voir figure. **Barème** : $\boxed{0.25+0.25 \text{ pt}}$

   (b) Montrons par récurrence que pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq \ell n\,(n)$.

   - $U_1 = 0$, alors $U_1 \geq \ell n\,(1)$. La proposition est vraie pour $n = 1$.
   - Soit $n \geq 1$, supposons que $U_n \geq \ell n\,(n)$.
     Comme f est croissante sur $[0, +\infty[$ et $U_n \geq \ell n\,(n) \geq 0$ alors $f(U_n) \geq f(\ell n\,(n))$.
     D'autre part $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(\ell n\,(n)) = \ell n\,(n) + e^{-\ell n\,(n)} = \ell n\,(n) + \dfrac{1}{n}$,
     d'après 2. on a : $f(\ell n\,(n)) \geq \ell n\,(n+1)$ donc $U_{n+1} \geq \ell n\,(n+1)$.
   - Conclusion : Pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq \ell n\,(n)$.

   Barème : $\boxed{1 \text{ pt}}$

   Pour tout $n \geq 1$, $U_n \geq \ell n\,(n)$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell n\,(n) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.

   Barème : $\boxed{0.5 \text{ pt}}$

   (c) $t \in [k, k+1]$ et $k > 0$ alors $0 < t \leq k+1$ d'où $\dfrac{1}{t} \geq \dfrac{1}{k+1}$ alors $\displaystyle\int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{k+1}$ et par la suite :

   Pour tout $n \geq 2$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n-2} \int_k^{k+1} \frac{dt}{t} \geq \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{k+1}$ donc : $\displaystyle\int_1^{n-1} \frac{dt}{t} \geq \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$

   et comme $\displaystyle\int_1^{n-1} \frac{dt}{t} = \ell n\,(n-1)$ donc $\ell n\,(n-1) + 1 \geq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots + \dfrac{1}{n-1}$.
   Ainsi : pour tout $n \geq 2$, $U_n \geq 1 + \ell n\,(n-1)$.

   Barème : $\boxed{0.75 \text{ pt}}$

   (d) Pour tout $n \geq 2$, nous avons : $\ell n\,(n) \leq U_n \leq 1 + \ell n\,(n-1)$ d'où :
   $$1 \leq \frac{U_n}{\ell n\,(n)} \leq \frac{1}{\ell n\,(n)} + \frac{\ell n\,(n-1)}{\ell n\,(n)}.$$
   Par ailleurs, on a :

   - $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell n\,(n) = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{\ell n\,(n)} = 0$
   - $\dfrac{\ell n\,(n-1)}{\ell n\,(n)} = 1 + \dfrac{\ell n\left(1 - \frac{1}{n}\right)}{\ell n\,(n)} = 1 + \dfrac{1}{\ell n\,(n)} \times \ell n\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ell n\,(n-1)}{\ell n\,(n)} = 1$.

$$\text{Donc } \lim_{n\to+\infty} \frac{U_n}{\ell n(n)} = 1.$$

Barème : $\boxed{0.25+0.5 \text{ pt}}$

4. (a) Il est claire que pour tout $k \geq 1$, $\mathscr{A}_k \leq \displaystyle\int_{U_k}^{U_{k+1}} \left|f(x) - x\right| dx$.

   (Le domaine du triangle $B_kA_kB_{k+1}$ est inclus dans le domaine limité par (C) et les droites d'équations $x = U_k, x = U_{k+1}$ et $y = x$.)

   d'où $\mathscr{A}_k \leq \displaystyle\int_{U_k}^{U_{k+1}} e^{-x}dx$ d'où $\mathscr{A}_k \leq \left[-e^{-x}\right]_{U_k}^{U_{k+1}}$ alors $\mathscr{A}_k \leq e^{-U_k} - e^{-U_{k+1}}$

   et par la suite, pour pour tout $n \geq 2$,

   $$s_n \leq e^{-U_1} - \cancel{e^{-U_2}} + \cancel{e^{-U_2}} - \cancel{e^{-U_3}} + \ldots + \cancel{e^{-U_{n-1}}} - e^{-U_n} \text{ et } U_1 = 0.$$

   $$\text{Donc } s_n \leq 1 - e^{-U_n}.$$

Barème : $\boxed{0.75 \text{ pt}}$

   (b) La suite (s_n) est croissante puisque elle est la somme d'une suite à termes positifs et comme $1-e^{-U_n} < 1$ alors (s_n) est majorée par 1, donc elle converge. Comme $0 \leq s_n < 1$ alors $0 \leq \displaystyle\lim_{n\to+\infty} s_n \leq 1$.

Barème : $\boxed{0.75 \text{ pt}}$