Lycée Hamouda Pacha La Manouba	Devoir de contôle n° 2		
	Epreuve : MATHEMATIQUES	Durée : 2 h	Coefficient : 4
4 ème Math		Pr : Ben Fredj S.	

N.B

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1. (4 points). Répondre par Vrai ou Faux, en justifiant la réponse.

1– Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}, \vec{v})$, la transformation qui à tout point d'affixe z associe le point d'affixe $i\bar{z}+1$ est une symétrie orthogonale.

2– Dans le plan orienté on donne un triangle équilatérale ABC.

Si σ est l'isométrie du plan qui envoi respectivement A, B et C respectivement en B, C et A alors σ est un antidéplacement.

Exercice 2. (6 points). Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose :

$$S_n = 1 + 31 + 31^2 + ... + 31^{n-1}$$

1– Vérifier que $S_{2013} - 31 \times S_{2012} = 1$ puis déduire que 31 et S_{2013} sont premiers entre eux.

2– Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\quad 30 \times S_n = 31^n - 1$.

3– (a) Vérifier que $31^{2013} \equiv 1 \left(\mathbf{mod}\, S_{2013}\right)$.

(b) Résoudre dans $\mathbb{Z}$ la congruence $31x \equiv 1 \left(\mathbf{mod}\, S_{2013}\right)$.

4– On admettra que 2011 est premier.

(a) Démontrer que si n est premier et $n \geq 7$ alors n divise $S_n - 1$.

(b) Déterminer le reste modulo 2011 du nombre S_{2013}.

Exercice 3. (4 points). Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,1]$ par : $f(x) = \sqrt{-\ln(x)}$. On note C la courbe de f dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1− Étudier la dérivabilité de f à gauche en 1.

Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2− α étant un réel de l'intervalle $]0,1[$. L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On note $\mathscr{V}\alpha$ le volume (en unité de volume) du solide engendré par la rotation de l'arc défini par les points M du plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$ de coordonnées (x, y) tels que $\alpha \leq x \leq 1$ et $0 \leq y \leq f(x)$.

Montrer que $\mathscr{V}\alpha = \pi\left(1 - \alpha + \alpha \ln \alpha\right)$ puis calculer $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathscr{V}\alpha$.

Exercice 4. (6 points).

1− Soit u la fonction définie sur l'intervalle $\mathbb{R}$ par : $u(x) = e^x - 1 - x$.

(a) Étudier le sens de variation de u puis déduire que pour tout réel x, $u(x) \geq 0$.

(b) Déduire que pour tout réel $x > 0$, $e^{-x} \leq \dfrac{1}{1+x}$

(c) Montrer que pour tout réel $x > 0$ et pour tout entier $n \geq 1$,

$$1 - \frac{1}{nx} \leq e^{-\frac{1}{nx}} \leq 1 - \frac{1}{1+nx}$$

2− Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $U_n = \displaystyle\int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\right) dt$ et $V_n = nU_n$.

(a) Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\dfrac{1}{n} \ln\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) \leq U_n \leq \dfrac{\ln 2}{n}$.

(b) Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} V_n$.

3− n étant un entier naturel non nul. Pour tout réel $x \geq 1$, on pose $F_n(x) = \displaystyle\int_n^{nx} g(t)dt$ où g la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $g(t) = 1 - e^{-\frac{1}{t}}$.

(a) Vérifier que pour tout réel $x \geq 1$ $F_n'(x) = n\left(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\right)$.

(b) Calculer $F_n(1)$ puis déduire que $U_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\int_n^{2n} g(t)dt$.

(c) Interpréter graphiquement les termes de chacune des suites (U_n) et (V_n).

Correction Du Devoir de contrôle # 2

Solution 1. .

1− **Faux** .On note s cette transformation et soit $O' = s(O)$ et $O'' = s(O')$. On sait que s est un antidéplacement.

Alors $z_{O'} = i\overline{z_O} + 1 = 1$ et $z_{O''} = i\overline{z_{O'}} + 1 = i + 1$ alors $s \circ s(O) \neq O$ alors $s \circ s \neq \mathbf{id}$ donc s n'est pas une symétrie orthogonale.

2− **faux** . σ est une isométrie.

On a $\sigma(A) = B$, $\sigma(B) = C$ et $\sigma(C) = A$ et comme $(\widehat{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}}) \equiv (\widehat{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}})(\mathbf{mod}\, 2\pi)$ alors σ est un déplacement.

Solution 2. .

1− $S_{2013} = 1+31+31^2+...+31^{2012} = 1+31\times\left(1+31+31^2+...+31^{2011}\right) = 1+31\times S_{2012}$.

Soit $d = 31 \wedge S_{2013}$ alors $d|31$ et $d|S_{2013}$ alors d divise $S_{2013} - 31 \times S_{2012}$ alors $d|1$ donc $d = 1$.

2− S_n étant la somme de n premiers termes d'une suite géométrique de raison 31 et de premier terme 1 alors :

$$S_n = \frac{31^n - 1}{31 - 1} \text{ donc } 30 \times S_n = 31^n - 1.$$

3− (a) D'après 2−, on a :$30 \times S_{2013} = 31^{2013} - 1$ alors S_{2013} divise $31^{2013} - 1$ donc $31^{2013} \equiv 1\left(\mathbf{mod}\, S_{2013}\right)$.

(b) On sait d'après la question précédente que 31^{2012} est une solution particulier de cette équation d'où :

$$\begin{cases} 31 \times 31^{2012} \equiv 1\left(\mathbf{mod}\, S_{2013}\right) \\ 31x \equiv 1\left(\mathbf{mod}\, S_{2013}\right) \end{cases} \text{ implique que } 31\left(x - 31^{2012}\right) \equiv 0\left(\mathbf{mod}\, S_{2013}\right)$$

et comme $31 \wedge S_{2013} = 1$ d'après le lemme de Gauss S_{2013} divise $x - 31^{2012}$ d'où $x \equiv 31^{2012}\left(\mathbf{mod}\, S_{2013}\right)$.

Réciproquement : Si $x \equiv 31^{2012} \Big(\textbf{mod}\, S_{2013}\Big)$ alors $31 \times x \equiv 31^{2013} \Big(\textbf{mod}\, S_{2013}\Big)$
et comme $31^{2013} \equiv 1 \Big(\textbf{mod}\, S_{2013}\Big)$ alors $31 \times x \equiv 1 \Big(\textbf{mod}\, S_{2013}\Big)$
Donc $S_{\mathbb{Z}} = \Big\{x, \quad \text{tel que} \quad x \equiv 31^{2012} \Big(\textbf{mod}\, S_{2013}\Big)\Big\}$

4— (a) On a : $30 \times S_n = 31^n - 1$
alors $30 \times (S_n - 1) + 30 = 31^n - 1$ alors $30 \times (S_n - 1) = 31^n - 31$.
n étant premier alors d'après le petit théorème de Fermat, n divise $31^n - 31$ donc n divise $30 \times (S_n - 1)$ et comme $n > 5$ alors $n \wedge 30 = 1$ donc n divise $S_n - 1$.

(b) D'après ce qui précède $S_{2011} \equiv 1 \Big(\textbf{mod}\, 2011\Big)$,

et comme $S_{2013} = S_{2011} + 31^{2011} + 31^{2012}$ alors $S_{2013} \equiv 1 + 31^{2011} + 31^{2012} \Big(\textbf{mod}\, 2011\Big)$

Comme 2011 est premier et $31 \wedge 2011 = 1$ alors $31^{2010} \equiv 1 \Big(\textbf{mod}\, 2011\Big)$ d'où $31^{2011} \equiv 31 \Big(\textbf{mod}\, 2011\Big)$ et $31^{2012} \equiv 31^2 \Big(\textbf{mod}\, 2011\Big)$ et par la suite $S_{2013} \equiv 1 + 31 + 31^2 \Big(\textbf{mod}\, 2011\Big)$ donc $S_{2013} \equiv 993 \Big(\textbf{mod}\, 2011\Big)$

Solution 3. .

1— Pour tout réel $x \in]0, 1[$, on a :

$$\frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \frac{\sqrt{-\ell\mathbf{n}\, x}}{x - 1} = -\frac{\ell\mathbf{n}\, x}{x - 1} \times \frac{1}{\sqrt{-\ell\mathbf{n}\, x}}$$

et comme $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{\ell\mathbf{n}\, x}{x - 1} = 1$ et $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{1}{\sqrt{-\ell\mathbf{n}\, x}} = +\infty$ alors $\lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty$.
f n'est pas dérivable à gauche en 1 et la courbe C de f admet au point d'abscisse 1 une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

2— f est continue et positive sur l'intervalle $[\alpha, 1]$, alors (en unité de volume)

$$\mathscr{V}\alpha = \int_{\alpha}^{1} \pi \Big(f(t)\Big)^2 dt = \int_{\alpha}^{1} -\pi \ell\mathbf{n}\, t dt = -\alpha \Big[t \ell\mathbf{n}\, t - t\Big]_{\alpha}^{1} = \pi \Big(1 - \alpha + \alpha \ell\mathbf{n}\, \alpha\Big).$$

Comme $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \alpha \ell\mathbf{n}\, \alpha = 0$ alors $\lim\limits_{\alpha \to 0^+} \mathscr{V}\alpha = \pi$.

Solution **4.** .

1. (a) Pour tout réel x, $u'(x) = e^x - 1$. (u étant dérivable sur $\mathbb{R}$ comme étant la somme des fonctions dérivables).
Si $x \leq 0$, $u'(x) \leq 0$ alors u est décroissante sur $]-\infty, 0]$;
si $x \geq 0$, $u'(x) \geq 0$ alors u est croissante sur $[0, +\infty[$
alors $u(0) = 0$ est un minimum absolu de u et par la suite pour tout réel x, $u(x) \geq 0$.

   (b) Pour tout réel x, on a : $e^x \geq x + 1$ d'où $1 \geq (x+1)e^{-x}$.
Pour tout réel $x > 0$, on a $1 + x > 0$ et comme $1 \geq (x+1)e^{-x}$ alors $e^{-x} \leq \dfrac{1}{1+x}$ (1)

   (c) Pour tout réel x, on a $e^x \geq x + 1$ donc pour tout réel x, $e^{-x} \geq -x + 1$ (2)
D'après (1) et (2), on a :

$$\text{pour tout réel } t > 0, \quad 1 - t \leq e^{-t} \leq \frac{1}{1+t}$$

En prenant $t = \dfrac{1}{nx}$ où $n \in \mathbb{N}^*$ et $x > 0$, alors :

$$1 - \frac{1}{nx} \leq e^{-\frac{1}{nx}} \leq \frac{nx}{nx+1} \text{ a savoir que } \frac{1}{1 + \frac{1}{nx}} = \frac{nx}{nx+1} = 1 - \frac{1}{1+nx}$$

2. n étant un entier naturel non nul.

   (a) En utilisant l'encadrement trouvé en 1−(c) , et en intégrant sur l'intervalle $[1, 2]$ (les fonctions intégrées sont continues sur l'intervalle $[1, 2]$) d'où :

$$\int_1^2 \frac{dt}{nt+1} \leq \int_1^2 \left(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\right) dt \leq \int_1^2 \frac{dt}{nt}$$

D'autre part :
   - $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{nt} = \frac{1}{n} \times \int_1^2 \frac{dt}{t} = \frac{\ell\mathbf{n}\, 2}{n}$,
   - $\displaystyle\int_1^2 \frac{dt}{nt+1} = \frac{1}{n} \times \int_1^2 \frac{n}{nt+1} dt = \frac{1}{n} \times \Big[\ell\mathbf{n}\,(nt+1)\Big]_1^2 = \frac{1}{n} \times \ell\mathbf{n} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right)$.

   (b) Comme $V_n = nU_n$, alors pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\ell\mathbf{n} \left(\frac{2n+1}{n+1}\right) \leq V_n \leq \ell\mathbf{n}\, 2$$

et comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{2n+1}{n+1} = 2$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} \ell\mathbf{n}\left(\dfrac{2n+1}{n+1}\right) = \ell\mathbf{n}\, 2$, d'après le théorème de Gendarme $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \ell\mathbf{n}\, 2$.

3. Soit G la primitive de g sur l'intervalle $]0, +\infty[$ qui s'annule en n (Une telle primitive existe et unique puisque g est continue sur $]0, +\infty[$), alors pour tout réel $x \geq 1$, $F_n(x) = G(nx)$.

   (a) Pour tout réel $x \geq 1$, $F_n'(x) = (nx)'G'(nx) = ng(nx) = n\Big(1 - e^{-\frac{1}{nx}}\Big)$.

   (b) $F_n(1) = G(n) = 0$.

$$\int_1^2 F_n'(t)dt = n\int_1^2 \Big(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\Big)dt$$

   d'où

$$F_n(2) - F_n(1) = n\int_1^2 \Big(1 - e^{-\frac{1}{nt}}\Big)dt = nU_n \text{ et}$$

$$F_n(2) = \int_n^{2n} g(t)dt \text{ et } F_n(1) = 0$$

   d'où

$$U_n = \frac{1}{n}\int_n^{2n} g(t)dt$$

   (c) Pour $n \geq 1$, et comme g est continue et positive sur l'intervalle $[n, 2n]$, V_n désigne en unité d'aire, l'aire de la partie du plan D_n, limitée par la courbe représentative de g et les droites d'équations $x = n, x = 2n$ et $y = 0$.

   U_n désigne la valeur moyenne de g sur l'intervalle $[n, 2n]$.

   L'aire du domaine D_n est égale à l'aire du rectangle de dimension n et U_n.