I) Résoudre une équation différentielle du type $y' = k\,y$

Définition Vocabulaire

Une équation de la forme $y' = a\,y$, où l'inconnue y est une fonction et a est un réel, est appelée équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant. Résoudre dans $\mathbb{R}$ une équation de la forme $y' = a\,y$, c'est trouver toutes les fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $y' = a\,y$. Ces fonctions Sont appelées solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y' = a\,y$.

Exemple1 : $y' + 5\,y = 0 \Leftrightarrow y' = -5\,y$

On reconnait que cette équation est de la forme $y' = a\,y$, ses solutions sont donc les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = c\,e^{-5\,x}$, où c est un réel.

Savoir($théorème$) soit k un nombre réel, résoudre l'équation différentielle $y' = k\,y$ consiste à déterminer toutes les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout nombre réel x , $f'(x) = k\,f(x)$.

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = k\,y$ sont les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = c\,e^{k\,x}$, où c est un réel.
- Pour tout couple $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}X\mathbb{R}$, l'équation $y' = k\,y$ admet une solution f et une seule (unique) telle que $f(x_0) = y_0$
- C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = y_0\,e^{k(x-x_0)}$.

  Exemple2 : résoudre dans $\mathbb{R}$: $y' + 5\,y = 0$ tel que : $y(1) = -3$.

  C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = -3.\ e^{-5(x-1)}$.

  A faire Ex 1et 7 page176 (tome1)

II) Résoudre une équation du type $y' = a\,y + b$ où a et $b \in \mathbb{R}$

Savoir ($théorème$)

- Les solutions de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ avec $a \neq 0$, sont les fonctions f dérivables sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = c\,e^{a\,x} - \frac{b}{a}, \text{ où c est un réel.}$$

Exemple3 : trouver la solution de l'équation différentielle $4y' - y = 6$ qui prend la valeur 4 en 0.

$4y' - y = 6 \Leftrightarrow y' = \frac{1}{4}\,y + \frac{3}{2}$. Elle est de la forme $y' = a\,y + b$ avec $a = \frac{1}{4}$ et $b = \frac{3}{2}$. ses solutions sont donc les fonctions :

$f(x) = c\,e^{\frac{x}{4}} - \mathbf{6}$ **où** c est un réel.

Nous pouvons maintenant déterminer la valeur de la constante c grâce a la condition initiale f(0) = 4 on a donc $c - 6 = 4 \Longrightarrow c = 10$. Donc $f(x) = \mathbf{10}\,e^{\frac{x}{4}} - \mathbf{6}$

A faire Ex 3et 4 page176 (tome1)

III) Résoudre une équation du type $y'' + \omega^2\,y = 0$ où $\omega \in \mathbb{R}$

Savoir($théorème$)

L'équation $y'' + \omega^2\,y = 0$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$ vérifiant :

- $f(0) = x_0$ et $f'(0) = y_0$.
- C'est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \frac{y_0}{\omega}\sin(\omega x) + x_0\cos(\omega x)$ $(\omega \neq 0)$.
- Exemple4 : soit l'équation différentielle (E) : $4y'' + 9\,y = 0$.

  1) Résoudre l'équation différentielle (E) .

  2) soit f la fonction qui est une solution de l'équation différentielle (E) . telle que $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sqrt{2}$, $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = f\left(-\frac{\pi}{6}\right) = 0$ et $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$. Donner l'expression de f.

  Solution 1) $f(x) = A\cos\left(\frac{3}{2}x\right) + B\sin\left(\frac{3}{2}x\right)$.

  2) $f(x) = \sqrt{2}\ \cos\left(\frac{3}{2}x - \frac{\pi}{4}\right)$

  A faire Ex 14 ,17 page 177 (tome1).